K-THEORIE FÜR OPERATORALGEBREN

HANNES THIEL

1. Einführung

Mit Operatoralgebren meinen wir C^*-Algebren und von Neumann Algebren, wobei wir vor allem C^*-Algebren betrachten werden. Was also ist K-Theorie für C*-Algebren?

K-Theorie ist 'die' Kohomologietheorie für C^*-Algebren. Sie besteht aus zwei (kovarianten) Funktoren $K_0(-)$ und $K_1(-)$, d.h.:

- Jeder C*-Algebra A werden zwei abelsche Gruppen $K_0(A)$ und $K_1(A)$ zugeordnet;
- Jedem *-Homomorphismus $\varphi\colon A \to B$ werden zwei Gruppenhomomorphismen $K_0(\varphi)\colon K_0(A) \to K_0(B)$ und $K_1(\varphi)\colon K_1(A) \to K_1(B)$ zugeordnet;

und es gelten die Funktoreigenschaften:

- Für jede C^*-Algebra A und für die Identitätsabbildung $\mathrm{id}_A\colon A \to A$ gilt $K_j(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{K_j(A)}\colon K_j(A) \to K_j(A)$ für $j = 0, 1$;
- Für alle C^*-Algebren A, B, C und *-Homomorphismen $\varphi\colon A \to B$ and $\psi\colon B \to C$ gilt $K_j(\psi \circ \varphi) = K_j(\psi) \circ K_j(\varphi)\colon K_j(A) \to K_j(C)$ für $j = 0, 1$.

Darüber hinaus gelten:

- *Homotopieinvarianz*: Falls zwei *-Homomorphismen $\varphi_0, \varphi_1\colon A \to B$ homotop sind, dann gilt $K_j(\varphi_0) = K_j(\varphi_1)$ für $j = 0, 1$;
- *Exakte Sequenzen*: Jede kurze exakte Sequenz

  $$0 \to I \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} A/I \to 0$$

  induziert eine 6-Term exakte Sequenz:

  $$\begin{tikzcd}
  K_0(I) \arrow[r, "K_0(\iota)"] & K_0(A) \arrow[r, "K_0(\pi)"] & K_0(A/I) \arrow[d, "\delta_0"] \\
  K_1(A/I) \arrow[u, "\delta_1"] & K_1(A) \arrow[l, "K_0(\pi)"] & K_1(I) \arrow[l, "K_1(\iota)"]
  \end{tikzcd}$$

Man benutzt oft die Kurzform $K_*(A)$ wenn man beide K-Gruppen $K_0(A)$ und $K_1(A)$ zusammen betrachten möchte.

Man kann K-Theorie für C^*-Algebren als die natürliche Verallgemeinerung von topologischer K-Theorie auf 'nichtkommutative topologische Räume' (=C^*-Algebren) betrachten. Topologische K-Theorie ist ein wichtiges Gebiet der (algbraischen) Topologie, welches dazu entwickelt wurde, Vektorbündel über topologischen Räumen und Mannigfaltigkeiten zu studieren.

K-Theorie ist eine der wichtigsten Invarianten für C^*-Algebren. Es ist daher von großem Interesse, die K-Gruppen für verschiedene C^*-Algebren auszurechnen. Dazu verwendet man z.B. die 6-Term exakte Sequenz und weitere Eigenschaften der K-Theorie, die wir später kennenlernen werden.

Date: June 15, 2020.

In manchen Fällen ist eine C^*-Algebra sogar durch ihre K-Theorie festgelegt, d.h. es gibt Klassen von C^*-Algebren, sodass für je zwei C^*-Algebren A und B aus dieser Klasse gilt:

$$A \cong B \quad \Leftrightarrow \quad K_*(A) \cong K_*(B).$$

Man sagt dann, dass die C^*-Algebren in der Klasse durch ihre K-Theorie *klassifiziert* werden, und man spricht von einem *Klassifikationsresultat*.

Ein weiterer wichtiger Aspekt der K-Theorie ist die *Strukturtheorie* von C^*-Algebren: Informationen über $K_*(A)$ geben uns Aufschluss über die Struktur der C^*-Algebra A. Dies hat auch Anwendungen in anderen Gebieten der Mathematik. Man kann z.B. zeigen, dass $K_0(C^*_{\mathrm{red}}(\mathbb{F}_2)) \cong \mathbb{Z}$, wobei $C^*_{\mathrm{red}}(\mathbb{F}_2)$ die reduzierte Gruppen-C^*-Algebra der freien Gruppe mit zwei Erzeugern ist. Daraus folgt, dass $C^*_{\mathrm{red}}(\mathbb{F}_2)$ außer 0 und 1 keine weiteren Projektionen enthält. Damit kann man nun die berühmte Kaplansky Vermutung für $\mathbb{F}_2$ beweisen: die (algebraische) Gruppenalgebra $\mathbb{C}[\mathbb{F}_2]$ besitzt keine Idempotenten außer 0 und 1.

Literatur

Wir werden uns hauptsächlich auf folgende Literatur stützen: [Bla98, RLL00]:

- B. Blackadar, *K-theory for operator algebras*, second ed., *Mathematical Sciences Research Institute Publications* **5**, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- M. Rørdam, F. Larsen, and N. Laustsen, *An introduction to K-theory for C^*-algebras*, *London Mathematical Society Student Texts* **49**, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

Daneben werden wir auch folgendes Buch verwenden: [Dav96]

- K. R. Davidson, *C^*-algebras by example*, *Fields Institute Monographs* **6**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

Als Grundlage für die allgemeine Theorie von C^*-Algebren kann man z.B. auf folgende Bücher zurückgreifen: [Bla06, Mur90, Ped79]

- B. Blackadar, *Operator algebras*, *Encyclopaedia of Mathematical Sciences* **122**, Springer-Verlag, Berlin, 2006, Theory of C^*-algebras and von Neumann algebras, Operator Algebras and Non-commutative Geometry, III.
- G. J. Murphy, *C^*-algebras and operator theory*, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1990.
- G. K. Pedersen, *C^*-algebras and their automorphism groups*, *London Mathematical Society Monographs* **14**, Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London-New York, 1979.

Plan der Vorlesung

Der grobe Plan für diese Vorlesung ist:

1. Woche (20.4.): Unitäre und $K_1(A)$.
2. Woche (27.4.): Projektionen und die Murray-von Neumann Halbgruppe $V(A)$.
3. Woche (4.5.): $K_0(A)$.
4. Woche (11.5.): Die geordnete Gruppe $K_0(A)$ und Spuren auf C^*-Algebren.
5. Woche (18.5.): Induktive Limiten und Stetigkeit von $K_*(-)$.
6. Woche (25.5.): Klassifikation von AF-Algebren.

xx Pfingstferien

References

[Bla98] B. Blackadar, *K-theory for operator algebras*, second ed., *Mathematical Sciences Research Institute Publications* **5**, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[Bla06] B. Blackadar, *Operator algebras*, *Encyclopaedia of Mathematical Sciences* **122**, Springer-Verlag, Berlin, 2006, Theory of C^*-algebras and von Neumann algebras, Operator Algebras and Non-commutative Geometry, III.

[Dav96] K. R. Davidson, *C^*-algebras by example*, *Fields Institute Monographs* **6**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[Mur90] G. J. Murphy, *C^*-algebras and operator theory*, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1990.

[Ped79] G. K. Pedersen, *C^*-algebras and their automorphism groups*, *London Mathematical Society Monographs* **14**, Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London-New York, 1979.

[RLL00] M. Rørdam, F. Larsen, and N. Laustsen, *An introduction to K-theory for C^*-algebras*, *London Mathematical Society Student Texts* **49**, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

Hannes Thiel. Mathematisches Institut, Universität Münster, Einsteinstr. 62, 48149 Münster, Germany.

Email address: `hannes.thiel@uni-muenster.de`

URL: `www.math.uni-muenster.de/u/hannes.thiel/`