Arbeitsauftrag Woche 1: Unitäre und K_1

Wiederholung/Auffrischung:

- (Kurze) exakte Sequenzen von C^*-Algebren, z.B. Paragraph 1.1.5 in [RLL00].
- Unitalisierung von C^*-Algebren, z.B. Paragraph 1.1.6 in [RLL00].
- Matrixalgebren über C^*-Algebren, z.B. Abschnitt 1.3 in [RLL00].
- Kategorien und Funktoren, z.B. Paragraph 3.2.1 in [RLL00].

Neues Material:

- Abschnitt 2.1 in [RLL00]: Unitäre Gruppe $\mathcal{U}(A)$; Homotopieäquivalenz von Unitären; $\mathcal{U}_0(A)$; Whitehead Lemma; Erzeugung von $\mathcal{U}_0(A)$ durch Exponentiale; Gruppe der Invertierbaren $\mathrm{Gl}(A)$; Retraktion $\mathrm{Gl}(A) \to \mathcal{U}(A)$ (2.1.8).
- Abschnitt 8.1 in [RLL00]: die Relation $\sim_1$ auf $\mathcal{U}_\infty(A)$; $K_1(A)$; das Standardbild von $K_1(A)$; Vereinfachung von $K_1(A)$, falls A unital; Beispiel $K_1(B(H)) = 0$.
- Abschnitt 8.2 (8.2.1 bis 8.2.4) in [RLL00]: der Funktor $K_1(-)$; Homotopieinvarianz von $K_1(-)$; Halbexaktheit von $K_1(-)$.

Einfache Fragen:

Um zu testen, ob Sie den Stoff verstanden haben, sollten Sie für sich versuchen, folgende einfache Fragen zu beantworten:

- Was sind $\mathrm{Gl}(C(X))$ und $\mathcal{U}(C(X))$ für X kompakt, Hausdorff?
- Seien $u, v \in \mathcal{U}(A)$. Warum gilt immer $\|u - v\| \leq 2$? Falls $\|u - v\| < 2$, dann sind u und v homotop, nach Lemma 2.1.3 in [RLL00]. Gilt die Umkehrung?
- Sei A eine unitale C^*-Algebra. Wir setzen $\mathrm{Gl}_n(A) := \mathrm{Gl}(M_n(A))$ und $\mathrm{Gl}_\infty(A) := \bigcup_n \mathrm{Gl}_n(A)$. Wie kann man $K_1(A)$ mittels $\mathrm{Gl}_\infty(A)$ beschreiben?

References

[RLL00] M. Rørdam, F. Larsen, and N. Laustsen, *An introduction to K-theory for C^*-algebras*, *London Mathematical Society Student Texts* **49**, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.