

Analysis III

Hannes Thiel

Wintersemester 2021/22
Fassung vom 1. Februar 2022

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|-----------|--|-----------|
| I | Maß und Integral | 1 |
| 0 | Vorbemerkungen | 3 |
| 1 | Mengensysteme | 4 |
| 2 | Inhalte und Maße | 9 |
| 3 | Die Sätze von Caratheodory und Hahn | 13 |
| 4 | Eigenschaften des Lebesgue-Maßes | 19 |
| 5 | Integration messbarer Funktionen | 24 |
| 6 | Parameterabhängige Integrale | 39 |
| 7 | L^p -Räume | 41 |
| 8 | Integration auf Produkträumen | 45 |
| 9 | Die Transformationsformel | 52 |
| | | |
| II | Gewöhnliche Differentialgleichungen | 61 |
| 1 | Definition und einführende Beispiele | 63 |
| 2 | Elementare Lösungsmethoden | 67 |
| 3 | Existenz- und Eindeutigkeitssätze | 76 |

Danksagung

Dieses Skript basiert im Wesentlichen auf dem Skript von Markus Haase aus dem WS 2020/21, welches wiederum auf den Vorlesungskripten von Walter Bergweiler und Detlef Müller sowie Notizen von Hendrik Vogt (Bremen) beruht. Für den Teil zur Konstruktion des Lebesgue-Maßes habe ich mich auch vom Skript von Siegfried Echterhoff aus dem WS 2021/22 inspirieren lassen.

Literatur

Bücher zu den Themen der Vorlesung sind Legion, darum wird hier nur eine kleine Auswahl angegeben. Die verlinkten e-Books sollten aus dem Netz der CAU kostenfrei zugänglich sein.

Maß- und Integrationstheorie:

- H. Amann und J. Escher, Analysis III, Birkhäuser, 2001.
<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-7643-8884-3>
- H. Bauer, Maß- und Integrationstheorie, Walter de Gruyter, 1990.
<https://www.degruyter.com/view/title/12747>
- J. Elstrodt, Maß- und Integrationstheorie, Springer, 1996.
<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-57939-8>
- O. Forster, Analysis 3, Vieweg, 1981.
<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-8348-2374-8>
- R. Schilling, Mass und Integral, Walter de Gruyter, 2015.
<https://www.degruyter.com/view/title/323718>

Differentialgleichungen:

- H. Amann, Gewöhnliche Differentialgleichungen, de Gruyter, 1995.
<https://www.degruyter.com/view/title/3398>
- O. Forster, Analysis II, 10. Aufl., Springer, 2013.
<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-658-02357-7>
- L. Grüne, O. Junge, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Springer, 2009.
<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-658-10241-8>
- H. Heuser, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Teubner, 1989.
- J.W. Prüss und M. Wilke, Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme, Birkhäuser (Springer Basel AG), 2010.
<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-0348-0002-0>
- G. Teschl, Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems, AMS, 2012
<https://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-ode/>
- G. J. Wirsching, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Teubner, 2006.
<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-8351-9044-3>

Beide Themen:

- D. Werner, Einführung in die höhere Analysis, Springer, 2009.
<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-540-79696-1>

Teil I

Maß und Integral

0 Vorbemerkungen

Dieser Teil des Kurses behandelt die Integration von Funktionen mehrerer Veränderlicher und zwar in einer Form, die auf Henri Lebesgue zurückgeht und sich auf den Begriff eines *Maßes* stützt. Während wir aus der Schule und Analysis II gewohnt sind, Flächeninhalte mithilfe von (Riemann-)Integralen zu bestimmen, geht Lebesgue den umgekehrten Weg: zunächst wird ein möglichst allgemeiner Inhaltsbegriff entwickelt (Maß), und darauf aufbauend dann der einer nach einem Maß integrierbaren Funktion und deren Integral.

Konkurrierend dazu könnte man auch die Theorie des Riemann-Integrals für Funktionen mehrerer Veränderlicher entwickeln. Allerdings hat dieser Integralbegriff mehrere Nachteile: Erstens ist die Situation zu speziell, da Maße an vielen Stellen in der Mathematik eine wichtige Rolle spielen, z.B. auch in der Stochastik; Zweitens sind “zu wenige” Funktionen Riemann-integrierbar. Letzteres drückt sich u.a. im folgenden Satz aus:

Satz 0.1. *Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall. Dann ist der Raum $R[a, b]$ der auf $[a, b]$ Riemann-integrierbaren Funktionen bezüglich der Halbnorm*

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx \quad (0.1)$$

nicht vollständig.

Man beachte, dass es Riemann-integrierbare Funktionen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $\|f\|_1 = 0$ aber $f \neq 0$ (Beispiel?). Darum hat man hier nur eine Halbnorm und daraus abgeleitet eine Halbmetrik. Konvergenz, Cauchy-Eigenschaft und Vollständigkeit sind aber wie für eine Metrik definiert.

Der Beweis von Satz 0.1 ist an dieser Stelle nicht zu leisten. (Wir kommen später darauf zurück.) Eine entscheidende Errungenschaft der Lebesguetheorie ist es, das Integral von $R[a, b]$ auf einen größeren Raum $\mathcal{L}^1[a, b]$ derart fortzusetzen, dass dieser bzgl. der Halbnorm (0.1) vollständig ist.

Wie schon gesagt, basiert der Lebesgue'sche Integralbegriff auf einem allgemeinen Inhaltsbegriff, dem eines *Maßes*. Dabei soll also das Maß $\mu(A) \in [0, \infty]$ einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ deren “Größe” im Sinne von Länge ($d = 1$), Flächeninhalt ($d = 2$), Volumen ($d = 3$), sein. Vernünftige Anforderungen an so einen Maßbegriff sind wohl:

- 1) **Striktheit:** $\mu(\emptyset) = 0$;
- 2) **Additivität:** $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ falls $A \cap B = \emptyset$;
- 3) **Monotonie:** $\mu(A) \leq \mu(B)$ falls $A \subseteq B$;
- 4) **Normiertheit:** $\mu([0, 1]^d) = 1$;
- 5) $\mu(T(A)) = \mu(A)$, wenn $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine “starre Bewegung” ist, d.h. eine Bijektion, die die euklidischen Abstände erhält.

(Veranschaulichen Sie sich, was das bedeutet.)

Allerdings hat Felix Hausdorff gezeigt, dass es für $d \geq 3$ unmöglich ist, diese Anforderungen allesamt zu erfüllen und dabei *beliebige* Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}^d$ zuzulassen. Dies folgt auch aus dem berühmten *Banach-Tarski-Paradox*: Man kann die abgeschlossene Einheitskugel $K = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 \leq 1\}$ im \mathbb{R}^3 in endlich viele disjunkte Teilmengen zerlegen und diese dann zu zwei Kugeln derselben Größe zusammensetzen.



Formal: Es existieren paarweise disjunkte Mengen $M_1, \dots, M_n \subseteq \mathbb{R}^3$ und starre Bewegungen T_1, \dots, T_n des \mathbb{R}^3 mit

$$K = \bigcup_{k=1}^n M_k, \quad \text{und} \quad K \cup (K + (2, 0, 0)) = \bigcup_{k=1}^n T_k(M_k).$$

Aufgabe. Warum zeigt das Banach-Tarski-Paradox, dass es kein Maß auf beliebigen Teilmengen von \mathbb{R}^3 gibt welches additiv, normiert und invariant unter starren Bewegungen ist?

Der Ausweg aus dieser Schwierigkeit ist, nicht allen Mengen ein ‘‘Maß’’ zuzuordnen, sondern dieses nur für gewisse Mengen zu definieren.

1 Mengensysteme

Wir bezeichnen mit $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge einer Menge X , also die Menge aller Teilmengen von X . Für $A \subseteq X$ sei $A^c := X \setminus A$ das Komplement von A (in X). Jede Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$ heißt ein **Mengensystem** auf X .

In der Maßtheorie wollen wir den Elementen eines Mengensystems (also bestimmten Teilmengen $A \subseteq X$) eine Zahl (=Maß) $\mu(A) \in [0, \infty]$ zuordnen. Dabei sollten die bereits genannten Regeln der Striktheit, Monotonie und Additivität gelten, oder besser noch:

σ -Additivität: $\mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$ falls $(A_n)_n$ eine Folge paarweise disjunkter Menge ist.

Insbesondere soll $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c)$ gelten. Damit diese Regeln sinnvoll sind, muss μ auf einem Mengensystem definiert sein, dass unter den entsprechenden Operationen abgeschlossen ist. Wenn wir fordern, dass das Mengensystem die leere Menge enthält, und unter Komplementen, abzählbaren Schnitten und abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist, denn führt dies zum Begriff einer σ -Algebra. Falls das Mengensystem nicht unter allen diesen Operationen abgeschlossen ist, führt das zu den abgeschwächten Begriffen eines (Halb)rings, und eines Dynkin-Systems.

Definition 1.1. Sei X Menge. Ein Mengensystem $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ auf X heißt **σ -Algebra** (auf X) falls gilt:

- (i) $\emptyset \in \Sigma$.
- (ii) Ist $A \in \Sigma$, so ist auch $A^c \in \Sigma$.
- (iii) Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in Σ , so ist auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.

Beispiele 1.2. Sei X eine Menge. Die folgenden Mengensysteme sind σ -Algebren auf X :

1. $\Sigma = \mathcal{P}(X)$.
2. $\Sigma = \{\emptyset, X\}$.
3. $\Sigma = \{\emptyset, A, A^c, X\}$, mit $A \subseteq X$.
4. $\Sigma = \{A \subseteq X : A \text{ oder } A^c \text{ ist höchstens abzählbar}\}$. (Übungsaufgabe.)

Bemerkung 1.3. Sei Σ eine σ -Algebra auf einer Menge X . Aus (iii) folgt (mit $A_n = \emptyset$ für $n > N$)

(iii)' Es gilt $\bigcup_{n=1}^N A_n \in \Sigma$ für alle $A_1, \dots, A_N \in \Sigma$.

Fordert man nur dies statt (iii), so nennt man Σ eine **Algebra**. Offensichtlich ist jede σ -Algebra eine Algebra, aber die Umkehrung gilt nicht, wie für unendliches X das Beispiel $\Sigma = \{A \subseteq X : A \text{ oder } A^c \text{ ist endlich}\}$ zeigt. Es genügt, (iii)' für $N = 2$ zu fordern, also $A \cup B \in \Sigma$ falls $A, B \in \Sigma$. (Der allgemeine Fall ergibt sich dann per Induktion.)

Wir geben einige einfache Folgerungen aus den Eigenschaften (i)–(iii) aus der Definition der σ -Algebra an:

- Aus (i) und (ii) folgt $X = \emptyset^c \in \Sigma$.
- Aus (ii) und (iii) folgt für eine Folge $(A_n)_n$ in Σ

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c \right)^c \in \Sigma.$$

Letzteres gilt auch wieder für endliche Schnitte – und das auch bereits in einer Algebra.

Der folgende Satz kann sehr einfach durch Überprüfung der Bedingungen aus Definition 1.1 bewiesen werden. Hier und im Folgenden sei X immer eine (nichtleere) Menge.

Satz und Definition 1.4. Sei M eine Menge¹ von σ -Algebren auf einer Menge X . Dann ist auch

$$\bigcap_{\Sigma \in M} \Sigma$$

eine σ -Algebra auf X . Für $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\substack{\Sigma \supseteq \mathcal{E} \\ \Sigma \text{ } \sigma\text{-Algebra}}} \Sigma$$

die von \mathcal{E} erzeugte σ -Algebra.

Offensichtlich ist $\sigma(\mathcal{E})$ die kleinste σ -Algebra, die \mathcal{E} enthält.

Beispiel 1.5. Die oben betrachtete σ -Algebra

$$\Sigma = \{A \subseteq X : A \text{ oder } A^c \text{ ist höchstens abzählbar}\}$$

wird von den endlichen Teilmengen von X erzeugt. Ein anderer (kleinerer) Erzeuger ist die Menge der einelementigen Teilmengen von X . (Übungsaufgabe.)

Die für uns wichtigste σ -Algebra ist die Folgende.

Definition 1.6. Sei (X, d) metrischer Raum. Die von den offenen Teilmengen von X erzeugte σ -Algebra heißt **Borelsche σ -Algebra** und wird mit $\mathcal{B}(X)$ bezeichnet. Ihre Elemente heißen **Borelmengen**.

Insbesondere interessiert uns der Fall $X = \mathbb{R}^d$ mit $d \in \mathbb{N}$. Hier werden wir üblicherweise die von der Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$ erzeugte Metrik zu Grunde legen, aber dies ist irrelevant, da alle Normen auf \mathbb{R}^d äquivalent sind und daher jeweils dieselben offenen Mengen besitzen. Wir schreiben kurz \mathcal{B} oder \mathcal{B}^d für $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

1.7 (Quader). Ein **endliches Intervall** ist jede Teilmenge I von \mathbb{R} der Form

$$(a, b), (a, b], [a, b), [a, b] \tag{1.1}$$

mit $-\infty < a \leq b < +\infty$. (Mit der Konvention $(a, a] = [a, a) = (a, a) = \emptyset$.) Ein **unendliches Intervall** ist eine Teilmenge I von \mathbb{R} der Form

$$(-\infty, b), (-\infty, b], (a, \infty), [a, \infty) \tag{1.2}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Für $a, b \in \mathbb{R}$ heißen (a, b) , $(-\infty, b)$ und (a, ∞) **offene Intervalle**; $[a, b]$, $(-\infty, b]$ und $[a, \infty)$ heißen **abgeschlossene Intervalle**; $(a, b]$, $(-\infty, b]$ und (a, ∞) heißen **linksoffene Intervalle**.

Die **Länge** eines Intervalles I wie in (1.1) oder (1.2) ist

$$l(I) := |I| := \begin{cases} b - a & \text{falls } -\infty < a \leq b < +\infty, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

¹Man mache sich klar: $M \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))$.

Ein **achsenparalleler Quader** oder kurz: **Quader**, ist jede Teilmenge Q von \mathbb{R}^d der Form

$$Q = I_1 \times \cdots \times I_d,$$

wobei die I_j Intervalle sind. Der Quader heißt **endlich**, wenn $|I_j| < \infty$ für alle j ist.

Ist jedes I_j (links)offen, dann heißt Q ein **(links)offener Quader**. Ein **Würfel** ist ein Quader $Q = I_1 \times \cdots \times I_d$ mit

$$|I_1| = |I_2| = \cdots = |I_d|,$$

d.h., alle Kanten von Q haben dieselbe Länge.

Für $a := (a_1, \dots, a_d)$ und $b = (b_1, \dots, b_d)$ mit $a \leq b$ (d.h., $a_j \leq b_j$ für alle $j \in \{1, \dots, d\}$) schreiben wir kurz

$$\begin{aligned} (a, b] &:= (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d] \\ &= \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : a_j < x_j \leq b_j \text{ für alle } j \in \{1, \dots, d\}\}. \end{aligned}$$

Analog werden $[a, b]$, $[a, b)$ und (a, b) definiert.

Wir bezeichnen die Menge der endlichen, linksoffenen Quader in \mathbb{R}^d mit

$$\mathcal{Q}^d := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}^d, a \leq b\}.$$

Lemma 1.8. *Jeder Quader im \mathbb{R}^d ist Durchschnitt von abzählbar vielen offenen Quadern.*

Jede offene Teilmenge des \mathbb{R}^d ist abzählbare Vereinigung paarweise disjunkter, linksoffener Würfel der Form $(a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{Q}^d$.

Beweis. Für die erste Behauptung betrachten wir zuerst $d = 1$: Jedes linksoffene Intervall (a, ∞) ist schon offen, und für jedes linksoffene Intervall $(a, b]$ mit $b < \infty$ gilt $(a, b] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (a, b + \frac{1}{n})$. Analog zeigt man, dass jedes rechtsoffene und jedes abgeschlossene Intervall Durchschnitt offener Intervalle ist. Für $d > 1$ wendet man dies in jeder Komponente an.

Der Beweis der zweiten Behauptung erfolgt durch "dyadische Unterteilung". Sei $O \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Man beginnt mit der Pflasterung von \mathbb{R}^d durch linksoffene Würfel mit ganzzahligen Eckpunkten, also allen Würfeln der Form

$$(n_1, n_1+1] \times \cdots \times (n_d, n_d+1] \quad (n_1, \dots, n_d \in \mathbb{Z}).$$

Jeder solche Würfel, der ganz in O liegt heiße "gut", die anderen "schlecht". Jeder schlechte Würfel wird nun durch Halbierung der Seitenintervalle in 2^d neue linksoffene Würfel zerlegt. Wieder gibt es gute und schlechte. Die schlechten zerlegt man wieder usw. ad infinitum.

Man beachte: Nach jedem Schritt bilden alle guten und schlechten Würfel zusammen eine Zerlegung von \mathbb{R}^d . Die nach dem n -ten Schritt verbleibenden schlechten Würfel haben allesamt die Kantenlänge 2^{-n} .

Alle auf diese Weise gewonnenen guten Würfel sind (nach Konstruktion) ganz in O enthalten. Ist andererseits $x \in O$ ein Punkt, so gibt es (weil O offen ist) ein $r > 0$ so, dass $U(x, r) \subseteq O$ ist. Wäre x in gar keinem guten Würfel enthalten, so gäbe es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ einen schlechten Würfel Q_n mit $x \in Q_n$ und Kantenlänge 2^{-n} . Für großes n muss dann aber $Q_n \subseteq U(x, r)$ sein, und damit $Q_n \subseteq O$. Das steht im Widerspruch dazu, dass Q_n schlecht ist. Man erhält also: die Menge O ist die Vereinigung aller guten Würfel. Und das sind höchstens abzählbar viele, weil in jedem der abzählbar vielen Schritte höchstens abzählbar viele gute Würfel dazukommen. \square

Satz 1.9. *Sei $d \in \mathbb{N}$. Jeder Quader in \mathbb{R}^d ist eine Borelmenge. Die Borel σ -Algebra \mathcal{B}^d wird von der Menge der halboffenen Quader $(a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{Q}^d$ erzeugt. Insbesondere gilt $\mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{Q}^d)$.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus der ersten Aussage von Lemma 1.8.

Sei nun $I_{\mathbb{Q}}$ die Menge aller halboffenen Quader $(a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{Q}^d$. Dann ist also $I_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathcal{B}^d$ und damit auch $\sigma(I_{\mathbb{Q}}) \subseteq \mathcal{B}^d$. Sei umgekehrt $O \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Dann ist O nach Lemma 1.8 die Vereinigung gewisser linksoffener Quader in $I_{\mathbb{Q}}$. Da aber $I_{\mathbb{Q}}$ abzählbar ist (warum?), folgt $O \in \sigma(I_{\mathbb{Q}})$ und damit $\mathcal{B}^d \subseteq \sigma(I_{\mathbb{Q}})$. \square

Ebenso wird \mathcal{B}^d von der Menge der halboffenen Quader $(a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}^d$ erzeugt. Ganz ähnlich sieht man, dass \mathcal{B}^d auch von den Quadern $(a, b), [a, b), [a, b], (a, \infty), [a, \infty), (-\infty, a)$ und $(-\infty, a]$ erzeugt wird, sowohl für $a, b \in \mathbb{R}^d$ wie $a, b \in \mathbb{Q}^d$.

Die Menge \mathcal{Q}^d der linksoffenen, endlichen Quader im \mathbb{R}^d bildet zwar keine σ -Algebra (warum?), aber wir werden in Lemma 1.11 sehen, dass sie ein Halbring im Sinne der nächsten Definition ist.

Definition 1.10. Ein Mengensystem $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ auf einer nichtleeren Menge X heißt **Halbring**, falls gilt:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{E}$;
- (ii) \mathcal{E} ist **schnittstabil**: es gilt $A \cap B \in \mathcal{E}$ für alle $A, B \in \mathcal{E}$;
- (iii) für alle $A, B \in \mathcal{E}$ existieren paarweise disjunkte Mengen $C_1, \dots, C_m \in \mathcal{E}$, so dass

$$A \setminus B = \bigcup_{j=1}^m C_j.$$

Falls \mathcal{E} auch abgeschlossen unter (endlichen) Vereinigungen ist, dann heißt \mathcal{E} **Ring**.

Lemma 1.11. Die Menge \mathcal{Q}^d aller linksoffenen, endlichen Quader im \mathbb{R}^d ist ein Halbring.

Beweis. Die Bedingung (i) ist klar. Für (ii) seien $a, b, e, f \in \mathbb{R}^d$ mit $a \leq b$ und $e \leq f$. Für $j \in \{1, \dots, d\}$ setzen wir $g_j := \max\{a_j, e_j\}$ und $h_j := \min\{b_j, f_j\}$. Dann gilt

$$(a, b] \cap (e, f] = (g, h] \in \mathcal{J}^d.$$

(Veranschaulichen Sie es sich für $d = 2$.)

Es bleibt zu zeigen, dass (iii) gilt. Für $d = 1$ macht man sich am besten eine Skizze. Man stellt etwa fest:

$$(a, b] \setminus (e, f] \in \{\emptyset, (a, b], (a, e], (f, b]\}.$$

Für $d > 2$ kann man $(a, b] \setminus (e, f]$ als disjunkte Vereinigung von 3^d linksoffenen, endlichen Quadern stellen. Für $d = 2$ kann man sich den Sachverhalt z.B. an Abbildung 1 veranschaulichen.

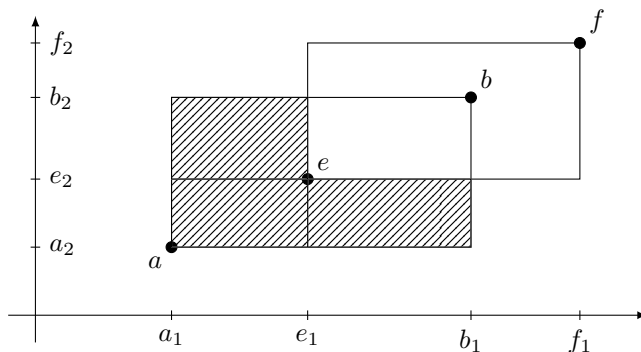


Abbildung 1: $(a, b] \setminus (e, f]$ besteht aus 3 Rechtecken.

Für einen formalen Beweis kann man Induktion über die Dimension bemühen. □

Um nachzuweisen, dass ein Mengensystem eine σ -Algebra ist, werden wir manchmal die folgende Definition benutzen.

Definition 1.12. Ein Mengensystem $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ auf einer nichtleeren Menge X heißt **Dynkin-System** falls gilt:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{D}$.

(ii) Ist $A \in \mathcal{D}$, so ist auch $A^c \in \mathcal{D}$.

(iii) Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweiser disjunkter Mengen in \mathcal{D} , so ist auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$.

Bemerkung. Der Unterschied zur σ -Algebra ist, dass in (iii) nur Folgen paarweiser disjunkter Mengen betrachtet werden.

Offensichtlich ist also jede σ -Algebra ein Dynkin-System. Die Umkehrung gilt nicht. Man wähle etwa X als eine endliche Menge mit einer geraden Anzahl von Elementen und \mathcal{D} als Menge aller Teilmengen mit einer geraden Anzahl von Elementen.

Dieses Beispiel zeigt auch, dass im Gegensatz zur σ -Algebra für $A, B \in \mathcal{D}$ nicht $A \cap B \in \mathcal{D}$ gelten muss. Ein Mengensystem, welches mit zwei Mengen auch jeweils ihre Schnittmenge enthält, heißt **schnittstabil**. Induktion zeigt, dass für ein schnittstabiles Mengensystem \mathcal{D} auch endliche Schnitte von Mengen in \mathcal{D} in \mathcal{D} enthalten sind.

Lemma 1.13. *Sei \mathcal{D} ein Dynkin-System, $A, B \in \mathcal{D}$ und $B \subseteq A$. Dann gilt $A \setminus B \in \mathcal{D}$.*

Beweis. Die Mengen A^c und B sind disjunkt und es gilt $A \setminus B = (A^c \cup B)^c$. \square

Satz 1.14. *Ein schnittstabiles Dynkin-System ist eine σ -Algebra.*

Beweis. Sei \mathcal{D} schnittstabiles Dynkin-System und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in \mathcal{D} . Zu zeigen ist, dass $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{D}$. Durch

$$B_n := A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j = A_n \cap \bigcap_{j=1}^{n-1} A_j^c$$

wird dann eine Folge disjunkter Mengen in \mathcal{D} definiert. Es folgt

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{D}. \quad \square$$

Analog zu 1.4 gilt: Der Durchschnitt einer Menge von Dynkin-Systemen auf einer Menge X ist wieder ein Dynkin-System. Für ein beliebiges Mengensystem $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt

$$\delta(\mathcal{E}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{D} \supseteq \mathcal{E} \\ \mathcal{D} \text{ Dynkin-System}}} \mathcal{D}$$

das von \mathcal{E} erzeugte **Dynkin-System**.

Satz 1.15. *Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ schnittstabil. Dann gilt $\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$.*

Beweis. Da jede σ -Algebra ein Dynkin-System ist, gilt $\delta(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$.

Umgekehrt folgt $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \delta(\mathcal{E})$, wenn wir zeigen können, dass $\delta(\mathcal{E})$ eine σ -Algebra ist. Nach Satz 1.14 ist dies der Fall, wenn $\delta(\mathcal{E})$ schnittstabil ist. Sei dazu $A \in \delta(\mathcal{E})$. Zu zeigen ist, dass für $B \in \delta(\mathcal{E})$ auch $A \cap B \in \delta(\mathcal{E})$ gilt. Setzt man

$$\mathcal{D}_A := \{B \subseteq X : A \cap B \in \delta(\mathcal{E})\},$$

so ist also $\delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_A$ zu zeigen.

Nun rechnet man aber leicht nach, dass \mathcal{D}_A Dynkin-System ist. (Tun Sie das!) Damit reicht es, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_A$ zu zeigen. Sei dazu $C \in \mathcal{E}$. Dann ist nach Voraussetzung $C \cap B \in \mathcal{E}$ für alle $B \in \mathcal{E}$, also $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_C$. Weil auch \mathcal{D}_C ein Dynkin-System ist, folgt also $A \in \delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_C$. Dies besagt $C \cap A \in \delta(\mathcal{E})$, also $C \in \mathcal{D}_A$. \square

Bemerkung 1.16. Im Beweis von Satz 1.15 wird ein "Trick" angewandt, der häufig nützlich ist, wenn man eine Aussage der Form

$$\forall A \in \sigma(\mathcal{E}) : A \text{ hat die Eigenschaft } \Phi$$

zeigen will, wobei Φ irgendeine Eigenschaft von Teilmengen von X ist. Dann definiert man

$$\mathcal{D} := \{A \in \sigma(\mathcal{E}) : A \text{ hat die Eigenschaft } \Phi\}$$

und muss nun $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}$ zeigen. Und dazu reicht es zu zeigen: (i) $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$ und (ii) \mathcal{D} ist eine σ -Algebra. Wenn \mathcal{E} schnittstabil ist, dann braucht man statt (ii) nur zeigen: (ii)' \mathcal{D} ist ein Dynkin-System.

2 Inhalte und Maße

Definition 2.1. Sei \mathcal{E} ein Halbring auf einer nichtleeren Menge X . Eine Abbildung $\nu: \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$ heißt **Inhalt**, falls gilt:

- (i) **Striktheit:** $\nu(\emptyset) = 0$.
- (ii) **Additivität:** Sind $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{E}$ paarweise disjunkte Mengen mit $\bigcup_{j=1}^m A_j \in \mathcal{E}$, so gilt

$$\nu\left(\bigcup_{j=1}^m A_j\right) = \sum_{j=1}^m \nu(A_j).$$

Ein Inhalt ν heißt **Prämaß** falls anstelle von (endlicher) Additivität sogar gilt:

- (iii) **σ -Additivität:** Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in \mathcal{E} mit der Eigenschaft $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{E}$, so ist

$$\nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n).$$

Bemerkung. Der Fall $\nu(A) = \infty$ ist zugelassen. Man rechnet hier mit dem Wert ∞ mit den offensichtlichen Regeln, etwa $\infty + x = \infty$ für $x \in [0, \infty]$.

Die Bedingung $\bigcup_{j=1}^m A_j \in \mathcal{E}$ in (ii) bzw. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{E}$ in (iii) ist wichtig, da ein Halbring nicht unter (abzählbaren) Vereinigungen abgeschlossen sein muss.

Definition 2.2. Ein **Messraum** ist ein Paar (X, Σ) bestehend aus einer (nichtleeren) Menge X und einer σ -Algebra Σ auf X . Die Elemente von Σ heißen **messbar**.

Ein Prämaß, welches auf einem Messraum (X, Σ) definiert ist, heißt **Maß**. Man nennt (X, Σ, μ) dann **Maßraum**.

Jedes Maß ist automatisch ein Prämaß, und jedes Prämaß ist ein Inhalt. Die Umkehrungen gelten im Allgemeinen nicht.

Beispiele 2.3. Sei X eine nichtleere Menge. Ein einfaches Beispiel eines Maßes ist das sogenannte **Zählmaß**

$$\text{card}: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty],$$

wobei $\text{card}(A)$ einfach die *Anzahl der Elemente* von $A \subseteq X$ angibt.

Für $x \in X$ sei die Abbildung $\delta_x: \mathcal{P}(X) \rightarrow \{0, 1\}$ gegeben durch

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

für $A \in \mathcal{P}(X)$. Dann ist δ_x ein Maß (Übung), genannt das **Dirac-Maß** auf X im Punkt x .

Wir zeigen nun, dass sich jeder Inhalt auf einem Halbring auf eindeutige Weise zu einem Inhalt auf dem erzeugten Ring fortsetzen lässt. Wie in 1.4 kann man zeigen, dass der Durchschnitt einer beliebigen Familie von Ringen wieder ein Ring ist, und wir können daher von dem von einem Mengensystem erzeugten Ring sprechen.

Lemma 2.4. Sei $\nu: \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$ ein Inhalt auf einem Halbring \mathcal{E} . Sei \mathcal{R} der von \mathcal{E} erzeugte Ring. Dann gilt

$$\mathcal{R} = \left\{ \bigsqcup_{j=1}^m A_j : A_1, \dots, A_m \in \mathcal{E} \right\}.$$

Weiter ist die Abbildung $\bar{\nu}: \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$, gegeben durch

$$\bar{\nu}(A) := \sum_{j=1}^m \nu(A_j)$$

falls $A = \bigsqcup_{j=1}^m A_j$ mit $A_j \in \mathcal{E}$, ein (wohldefinierter) Inhalt auf \mathcal{R} .

Beweis. Die Aussage über \mathcal{R} ist eine Übung. Um zu zeigen, dass $\bar{\nu}$ wohldefiniert ist, sei $A \in \mathcal{R}$ mit zwei Zerlegungen $A = \bigsqcup_{j=1}^m A_j$ und $A = \bigsqcup_{k=1}^n B_k$. Wir verwenden am zweiten und vierten Schritt, dass ν ein Inhalt ist, und erhalten:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \nu(A_j) &= \sum_{j=1}^m \nu\left(\bigsqcup_{k=1}^n A_j \cap B_k\right) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \nu(A_j \cap B_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \nu(A_j \cap B_k) = \sum_{k=1}^n \nu\left(\bigsqcup_{j=1}^m A_j \cap B_k\right) = \sum_{k=1}^n \nu(B_k). \end{aligned}$$

Damit ist $\bar{\nu}$ wohldefiniert.

Es ist klar, dass $\bar{\nu}$ strikt ist. Da \mathcal{R} abgeschlossen unter endlichen Vereinigungen ist, genügt es für die Additivität von $\bar{\nu}$ zu zeigen, dass $\bar{\nu}(A \cup B) = \bar{\nu}(A) + \bar{\nu}(B)$ für alle disjunkten Mengen $A, B \in \mathcal{R}$. Seien also $A, B \in \mathcal{R}$ disjunkt. Wir erhalten $A_j, B_k \in \mathcal{E}$, sodass $A = \bigsqcup_{j=1}^m A_j$ und $B = \bigsqcup_{k=1}^n B_k$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \bar{\nu}(A \cup B) &= \bar{\nu}(A_1 \sqcup \dots \sqcup A_m \sqcup B_1 \sqcup \dots \sqcup B_n) \\ &= \nu(A_1) + \dots + \nu(A_m) + \nu(B_1) + \dots + \nu(B_n) = \bar{\nu}(A) + \bar{\nu}(B). \quad \square \end{aligned}$$

Wir stellen einige Eigenschaften von Inhalten und Maßen zusammen.

Satz 2.5. Sei $\nu: \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$ ein Inhalt auf einem Halbring \mathcal{E} . Dann gilt:

- (1) **Monotonie:** Für $A, B \in \mathcal{E}$ mit $A \subseteq B$ gilt $\nu(A) \leq \nu(B)$.
- (2) **Subadditivität:** Für $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{E}$ mit $\bigcup_{j=1}^m A_j \in \mathcal{E}$ gilt $\nu(\bigcup_{j=1}^m A_j) \leq \sum_{j=1}^m \nu(A_j)$.

Beweis. Nach Lemma 2.4 lässt sich ν zu einem Inhalt auf dem von \mathcal{E} erzeugten Ring fortsetzen. Wir können daher o.B.d.A. annehmen, dass \mathcal{E} ein Ring ist.

Monotonie: Seien $A, B \in \mathcal{E}$ mit $A \subseteq B$. Da \mathcal{E} ein Ring ist, gilt $B \setminus A \in \mathcal{E}$. Wir haben $B = A \sqcup (B \setminus A)$, und daher

$$\nu(A) \leq \nu(A) + \nu(B \setminus A) = \nu(B).$$

Subadditivität: Seien $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{E}$ mit $A := \bigcup_{j=1}^m A_j \in \mathcal{E}$. Wie im Beweis von Satz 1.14 setzen wir $B_1 = A_1$ und

$$B_n := A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j$$

für $n = 2, \dots, m$. Dann sind B_1, \dots, B_m paarweise disjunkte Mengen mit $\bigcup_{j=1}^m A_j = \bigsqcup_{j=1}^m B_j$. Für jedes j gilt außerdem $B_j \subseteq A_j$, und wegen Monotonie folgt daher:

$$\nu\left(\bigcup_{j=1}^m A_j\right) = \nu\left(\bigsqcup_{j=1}^m B_j\right) = \sum_{j=1}^m \nu(B_j) \leq \sum_{j=1}^m \nu(A_j). \quad \square$$

Satz 2.6. Sei $\mu: \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$ ein Inhalt auf einem Ring \mathcal{E} . Dann sind äquivalent:

- (1) μ ist ein Prämaß, d.h., es gilt σ -Additivität;
- (2) σ -Subadditivität: Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathcal{E} mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{E}$, so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n);$$

- (3) μ erhält Suprema aufsteigender Folgen: Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge in \mathcal{E} mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{E}$, so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sup_n \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Beweis. ‘(2) \Rightarrow (1)’: Um zu zeigen, dass μ σ -additiv ist, sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in \mathcal{E} mit $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{E}$. Da μ (endlich) additiv und monoton (nach Satz 2.5) ist, gilt für jedes $m \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^m \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^m A_n\right) \leq \mu(A).$$

Da dies für jedes m gilt, folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \mu(A_n) \leq \mu(A).$$

Die umgekehrte Ungleichung gilt, das μ nach Annahme μ σ -subadditiv ist.

‘(1) \Rightarrow (3)’: Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge in \mathcal{E} mit $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{E}$. Dann ist die Folge $(\mu(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ aufsteigend, da μ monoton ist. Daher gilt $\sup_n \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.

Wie im Beweis der Subadditivität in Satz 2.5 setzen wir $B_1 := A_1$ und $B_n := A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j$ für $n \geq 2$. Es folgt

$$\mu(A_n) = \mu\left(\bigsqcup_{j=1}^n B_j\right) = \sum_{j=1}^n \mu(B_j) \rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \mu\left(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \mu(A).$$

‘(3) \Rightarrow (2)’: Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathcal{E} mit $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{E}$. Für $n \in \mathbb{N}$ setze $B_n := \bigcup_{j=1}^n A_j$. Dann ist $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge mit $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Wir verwenden beim vierten Schritt, dass μ subadditiv ist (Satz 2.5) und erhalten:

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j). \quad \square$$

Bemerkung 2.7. Sei X eine Menge. Für Teilmengen A, A_1, A_2, \dots von X schreiben wir $A_n \nearrow A$ falls $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Analog schreiben wir $A_n \searrow A$ falls $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ und $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$.

Sei $\mu: \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ ein Maß auf einer σ -Algebra $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$. Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in Σ . Falls $A_n \nearrow A$, dann gilt $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$ nach Satz 2.6 (da Σ eine σ -Algebra ist, gilt automatisch $A \in \Sigma$).

Ist $\mu(A_N) < \infty$ für ein $N \in \mathbb{N}$, so folgt aus $A_n \searrow A$, dass $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$. Um dies zu sehen, setzen wir $B_n = A_N \setminus A_n$. Dann gilt $B_n \nearrow B := A_N \setminus A$, und damit $\mu(B_n) \rightarrow \mu(B)$. Wegen $\mu(A_N) < \infty$ gilt dann

$$\mu(A_n) = \mu(A_N) - \mu(B_n) \rightarrow \mu(A_N) - \mu(B) = \mu(A).$$

Ist hingegen $\mu(A_N) = \infty$ für alle $N \in \mathbb{N}$, so muss aus $A_n \searrow A$ nicht $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$ folgen. Ein Beispiel ist durch das Zählmaß card auf der Menge \mathbb{N} mit σ -Algebra $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ und den Mengen $A_n = \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}$ gegeben. Hier gilt $A_n \searrow \emptyset$, aber $\text{card}(A_n) = \infty \not\rightarrow 0 = \text{card}(\emptyset)$.

Beispiel 2.8. Wir betrachten die Algebra

$$\mathcal{E} := \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ oder } A^c \text{ ist endlich}\}.$$

Wir definieren $\nu: \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$ durch

$$\nu(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ endlich} \\ 1, & \text{falls } A \text{ unendlich.} \end{cases}$$

Man überprüft leicht, dass ν ein Inhalt ist. Für die Mengen $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$ gilt $A_n \nearrow \mathbb{N}$, aber $\nu(A_n) = 0 \not\rightarrow 1 = \nu(\mathbb{N})$. Es folgt aus Satz 2.6, dass ν kein Prämaß ist.

2.9 (Volumen). Sei $Q = I_1 \times \cdots \times I_d$ ein Quader im \mathbb{R}^d . Dann heißt

$$\text{vol}^d(Q) := |Q| := |I_1| \cdot |I_2| \cdot \cdots \cdot |I_d|$$

sein (**elementares**) **Volumen**. Wir folgen dabei ab jetzt immer der Konvention

$$\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty := 0.$$

Falls die Dimension d klar ist, schreiben wir auch einfach vol statt vol^d .

Wir zeigen nun, dass das Elementarvolumen ein Inhalt auf dem Halbring \mathcal{Q}^d der linksoffenen, endlichen Quader im \mathbb{R}^d ist. In Satz 3.1 werden wir dann zeigen, dass sich vol eindeutig zu einem Maß λ^d auf der σ -Algebra \mathcal{B}^d der Borel-Mengen im \mathbb{R}^d fortsetzt. Insbesondere ist vol also sogar ein Prämaß auf \mathcal{Q}^d .

Satz 2.10. *Das Elementarvolumen $\text{vol}: \mathcal{Q}^d \rightarrow [0, \infty)$ ist ein Inhalt für jedes $d \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Offenbar ist $\text{vol}(\emptyset) = 0$. Es bleibt zu zeigen, dass für paarweise disjunkte Quader $Q_1, \dots, Q_m \in \mathcal{Q}^d$ deren Vereinigung $Q = \bigcup_{j=1}^m Q_j$ auch ein linksoffener Quader ist, gilt:

$$\text{vol}(Q) = \sum_{j=1}^m \text{vol}(Q_j).$$

Wir zeigen dies durch Induktion nach d .

Für $d = 1$ sind $Q = (a, b]$ und die $Q_j = (a_j, b_j]$ Intervalle. Nach Ummummerierung können wir annehmen, dass $a_1 < a_2 < \dots < a_m$. Da Q die disjunkte Vereinigung von Q_1, \dots, Q_m ist, folgt dann

$$a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = a_3 < \dots < b_{m-1} = a_m < b_m = b,$$

und damit

$$\text{vol}^1(Q) = b - a = \sum_{j=1}^m (b_j - a_j) = \sum_{j=1}^m \text{vol}^1(Q_j).$$

Für den Induktionsschritt, sei $d \geq 2$. Wir nehmen an, dass $\text{vol}^{d-1}: \mathcal{Q}^{d-1} \rightarrow [0, \infty)$ ein Inhalt ist. Es sei K eine endliche Indexmenge, und $Q_k \in \mathcal{Q}^d$ für $k \in K$ paarweise disjunkte Quader, sodass $Q = \bigcup_{k \in K} Q_k$ auch zu \mathcal{Q}^d gehört. Wir zerlegen diese Quader als

$$Q = I \times Q', \quad \text{und} \quad Q_k = I_k \times Q'_k$$

für linksoffene Intervalle $I, I_k \subseteq \mathbb{R}$ und linksoffene Quader $Q', Q'_k \in \mathcal{Q}^{d-1}$ für $k \in K$. Nach Definition gilt

$$\text{vol}^d(Q) = |I| \text{vol}^{d-1}(Q'), \quad \text{und} \quad \text{vol}^d(Q_k) = |I_k| \text{vol}^{d-1}(Q'_k).$$

für $k \in K$.

Die Intervalle I_k haben die Vereinigung I , sind aber nicht notwendig disjunkt. Wir können aber paarweise disjunkte, linksoffene Intervalle J_l für l in einer endlichen Indexmenge L wählen, sodass jedes I_k eine Vereinigung von einigen dieser Intervalle ist. Konkret: Für $k \in K$ gibt es eine Teilmenge $L_k \subseteq L$, sodass $I_k = \bigsqcup_{l \in L_k} J_l$. Dann ist $Q_k = \bigsqcup_{l \in L_k} J_l \times Q'_k$ und $|I_k| = \sum_{l \in L_k} |J_l|$, und daher

$$\text{vol}^d(Q_k) = |I_k| \text{vol}^{d-1}(Q'_k) = \sum_{l \in L_k} |J_l| \text{vol}^{d-1}(Q'_k).$$

Es gilt $Q = \bigsqcup_{k \in K} \bigsqcup_{l \in L_k} J_l \times Q'_k$. Wir ordnen diese Zerlegung nun nach gleichen L -Indizes um. Für jedes $l \in L$ setzen wir $K_l := \{k \in K : l \in L_k\}$, sodass $Q = \bigsqcup_{l \in L} \bigsqcup_{k \in K_l} J_l \times Q'_k$. Für jedes $l \in L$ gilt $Q' = \bigsqcup_{k \in K_l} Q'_k$, und daher nach Induktionsvoraussetzung

$$\text{vol}^{d-1}(Q') = \sum_{k \in K_l} \text{vol}^{d-1}(Q'_k).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \text{vol}^d(Q) &= |I| \text{vol}^{d-1}(Q') = \sum_{l \in L} |J_l| \text{vol}^{d-1}(Q') \\ &= \sum_{l \in L} \sum_{k \in K_l} |J_l| \text{vol}^{d-1}(Q'_k) = \sum_{k \in K} \sum_{l \in L_k} |J_l| \text{vol}^{d-1}(Q'_k) = \sum_{k \in K} \text{vol}^d(Q_k). \quad \square \end{aligned}$$

Definition 2.11. Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum. Eine Teilmenge N von X heißt **Nullmenge** (oder μ -**Nullmenge**), falls es eine Menge $M \in \Sigma$ gibt mit $N \subseteq M$ und $\mu(M) = 0$.

Das Maß μ bzw. der Maßraum (X, Σ, μ) heißt **vollständig**, falls jede Nullmenge auch messbar (also selbst in Σ enthalten) ist.

Lemma 2.12. Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (1) Eine messbare Menge $N \in \Sigma$ ist genau dann eine Nullmenge, wenn $\mu(N) = 0$ ist.
- (2) Teilmengen von Nullmengen sind Nullmengen.
- (3) Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind Nullmengen.

Beweis. (1) folgt aus der Monotonie von μ , und (3) aus der σ -Subadditivität (wie geht das genau?). (2) sollte klar sein. \square

Aufgabe. Sei (X, Σ, μ) ein vollständiger Maßraum und A und C messbare Teilmengen mit $A \subseteq C$ und $\mu(A) = \mu(C) < \infty$. Zeigen Sie: Ist $B \subseteq X$ mit $A \subseteq B \subseteq C$, so ist auch B messbar mit $\mu(B) = \mu(A) = \mu(C)$.

Man kann einen Maßraum (X, Σ, μ) **vervollständigen**, indem man zu

$$\tilde{\Sigma} := \{B : \text{es gibt } A, C \in \Sigma \text{ mit } A \subseteq B \subseteq C \text{ und } \mu(C \setminus A) = 0\}$$

übergeht und dann $\tilde{\mu}(B) := \mu(A)$ definiert.

Aufgabe. Zeigen Sie: (i) $\tilde{\Sigma}$ ist eine σ -Algebra die Σ enthält; (ii) $\tilde{\mu}$ ist ein (wohldefiniertes!) Maß auf $\tilde{\Sigma}$, das μ fortsetzt und (iii) der Maßraum $(X, \tilde{\Sigma}, \tilde{\mu})$ ist vollständig.

3 Die Sätze von Caratheodory und Hahn

Sei $\nu: \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$ ein auf einem Halbring definierter Inhalt. Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass ν auf natürliche Weise ein Maß auf einer assoziierten σ -Algebra definiert. Dazu konstruiert man in einem ersten Schritt aus ν ein sogenanntes "äußeres Maß" $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$. Der Satz von Caratheodory zeigt dann, dass zu jedem äußeren Maß μ^* auf X eine natürliche σ -Algebra $\Sigma(\mu^*)$ gehört, sodass die Einschränkung $\mu^*|_{\Sigma(\mu^*)}$ ein (vollständiges) Maß ist. Für den Fall eines Inhalts ν auf einem Halbring \mathcal{E} mit assoziiertem äußeren Maß μ^* zeigt dann der Satz von Hahn, dass $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \Sigma(\mu^*)$. Falls ν sogar σ -additiv (also ein Prämaß) ist, dann gilt $\mu^*|_{\mathcal{E}} = \nu$, und das Maß $\mu^*|_{\Sigma(\mu^*)}$ setzt ν fort.

Wir wenden diese abstrakte Idee dann auf das Elementarvolumen von Paragraph 2.9 an um das Lebesgue-Maß zu konstruieren. Unser Ziel ist es, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 3.1 (Satz vom Lebesgue-Maß). *Es gibt genau ein Maß λ^d auf \mathcal{B}^d mit $\lambda^d(Q) = \text{vol}^d(Q)$ für jeden endlichen Quader Q in \mathbb{R}^d .*

Definition 3.2. Eine Abbildung $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ heißt **äußeres Maß** (auf der Menge X), falls gilt:

- (i) **Striktheit:** $\mu^*(\emptyset) = 0$;
- (ii) **Monotonie:** Sind $A, B \subseteq X$ mit $A \subseteq B$, so ist $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;
- (iii) **σ -Subadditivität:** Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{P}(X)$, so gilt

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Nach Definition 2.2 und Satz 2.6 ist jedes Maß auf $\mathcal{P}(X)$ auch ein äußeres Maß. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Lemma 3.3. Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit $\emptyset \in \mathcal{E}$ und $\nu: \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$ mit $\nu(\emptyset) = 0$. Dann ist durch

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) : (B_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathcal{E} \text{ mit } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right\}$$

ein äußeres Maß $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ definiert.

Beweis. Striktheit und Monotonie von μ^* folgen unmittelbar. Es bleibt zu zeigen, dass μ^* auch σ -subadditiv ist. Sei also $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{P}(X)$. Wir müssen zeigen, dass $\mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n)$. Dies ist klar, falls $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = \infty$. Wir können also annehmen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) < \infty$.

Sei $\varepsilon > 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert dann eine Folge $(B_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{E} mit

$$A_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{n,k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \nu(B_{n,k}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Wegen

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{n,k}$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \nu(B_{n,k}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

folgt $\mu^*(A) \leq \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$. Da dies für beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt, folgt die gewünschte Ungleichung. \square

Definition 3.4. Das **äußere Lebesgue-Maß** einer Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ist

$$\lambda^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \text{vol}(Q_n) : (Q_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathcal{Q}^d \text{ mit } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \right\} \in [0, \infty].$$

Die dadurch definierte Abbildung $\lambda^*: \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$ heißt **äußeres Lebesgue-Maß**.

Bemerkung. Man beachte, dass hier ein Infimum über eine nichtleere Teilmenge von $[0, \infty]$ genommen wird, denn \mathbb{R}^d selbst wird ja schon von eine Folge von linksoffenen, endlichen Quadern überdeckt.

Die grundlegende Idee hinter der Definition des äußeren Lebesgue-Maß war schon den "alten Griechen" bekannt: eine krummlinig begrenzte Flächen wird dadurch gemessen, dass man sie durch einfach zu messende Flächen (Polygone) ausschöpft bzw. sie mit solchen überdeckt.

Das folgende Lemma ist einfach zu beweisen.

Lemma 3.5. Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ ein endlicher Quader, und $\varepsilon > 0$. Dann existieren $A, B \in \mathcal{Q}^d$, sodass $\bar{A} \subseteq Q \subseteq B^\circ$ and

$$\text{vol}(A) + \varepsilon \geq \text{vol}(Q) \geq \text{vol}(B) - \varepsilon.$$

Satz 3.6. Das äußere Lebesgue-Maß λ^* ist ein äußeres Maß auf \mathbb{R}^d . Für jeden endlichen Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt $\lambda^*(Q) = \text{vol}(Q)$.

Beweis. Die erste Aussage folgt direkt aus Lemma 3.3. Sei nun $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ ein endlicher Quader.

Wir zeigen zuerst $\lambda^*(Q) \leq \text{vol}(Q)$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Lemma 3.5 erhalten wir $B \in \mathcal{Q}^d$ mit $Q \subseteq B$ und $\text{vol}(B) \leq \text{vol}(Q) + \varepsilon$. Dann ist $(Q_n)_n$ mit $Q_1 = B$ und $Q_2 = Q_3 = \dots = \emptyset$ eine Folge in \mathcal{Q}^d deren Vereinigung Q überdeckt. Nach Definition von λ^* folgt

$$\lambda^*(Q) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{vol}(Q_n) = \text{vol}(B) \leq \text{vol}(Q) + \varepsilon.$$

Da dies für beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt, folgt die erwünschte Ungleichung.

Wir zeigen nun $\text{vol}(Q) \leq \lambda^*(Q)$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Definition von $\lambda^*(Q)$ erhalten wir eine Folge $(Q_n)_n$ in \mathcal{Q}^d , sodass

$$Q \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n, \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \text{vol}(Q_n) \leq \lambda^*(Q) + \varepsilon.$$

Wir wenden nun Lemma 3.5 für Q und jedes Q_n an und erhalten $A, B_n \in \mathcal{Q}^d$, sodass

$$\bar{A} \subseteq Q, \quad \text{und} \quad \text{vol}(Q) \leq \text{vol}(A) + \varepsilon,$$

sowie

$$Q_n \subseteq B_n^\circ, \quad \text{und} \quad \text{vol}(B_n) \leq \text{vol}(Q_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Dann gilt $\bar{A} \subseteq Q \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^\circ$. Wegen Kompaktheit von \bar{A} erhalten wir N , sodass $\bar{A} \subseteq \bigcup_{n=1}^N B_n$. Nach Satz 2.5 ist das Elementarvolumen monoton und subadditiv, und es folgt

$$\begin{aligned} \text{vol}(Q) &\leq \varepsilon + \text{vol}(A) \leq \varepsilon + \text{vol}\left(\bigcup_{n=1}^N B_n\right) \leq \varepsilon + \sum_{j=1}^N \text{vol}(B_j) \\ &\leq \varepsilon + \sum_{j=1}^N \left(\text{vol}(Q_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}\right) \leq 2\varepsilon + \sum_{j=1}^N \text{vol}(Q_j) \leq 3\varepsilon + \lambda^*(Q). \end{aligned}$$

Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, folgt die gewünschte Ungleichung. \square

Korollar 3.7. *Das Elementarvolumen $\text{vol}^d: \mathcal{Q}^d \rightarrow [0, \infty)$ ist ein Prämaß für jedes $d \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Nach Satz 2.10 ist vol^d ein Inhalt. Es folgt aus Satz 3.6, dass vol^d σ -subadditiv ist. Mit Satz 2.6 folgt, dass vol^d ein Prämaß ist. \square

Die Idee ist nun, durch Einschränkung eines äußeren Maßes auf eine geeignete σ -Algebra ein Maß zu gewinnen. Die Erkenntnis, dass und wie dies geht, verdanken wir einer genialen Idee von Caratheodory.

Definition 3.8. Sei $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ ein äußeres Maß auf X . Eine Teilmenge $A \subseteq X$ von X heißt μ^* -messbar, falls

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^c) \quad \text{für alle } T \subseteq X.$$

Die Menge der μ^* -messbaren Teilmengen von X wird mit $\Sigma(\mu^*)$ bezeichnet.

Bemerkung 3.9. Nach Definition des äußeren Maßes gilt immer

$$\mu^*(T) = \mu^*((T \cap A) \cup (T \cap A^c)) \leq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^c).$$

Was in Definition 3.8 gefordert wird, ist also

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^c).$$

Satz 3.10 (Maßerweiterungssatz von Carathéodory). *Sei μ^* ein äußeres Maß auf $\mathcal{P}(X)$. Dann ist $\Sigma(\mu^*)$ eine σ -Algebra und die Einschränkung von μ^* auf $\Sigma(\mu^*)$ ist ein vollständiges Maß.*

Beweis. Zunächst gilt offensichtlich $\emptyset \in \Sigma(\mu^*)$ und mit A ist auch A^c in $\Sigma(\mu^*)$, da die Bedingung aus Definition 3.8 symmetrisch in A und A^c ist.

Wir zeigen zuerst, dass $\Sigma(\mu^*)$ eine Algebra ist, dann dass $\Sigma(\mu^*)$ ein Dynkin-System ist, und benutzen schließlich Satz 1.14 um zu zeigen, dass $\Sigma(\mu^*)$ eine σ -Algebra ist.

Seien $A, B \in \Sigma(\mu^*)$ und $T \subseteq X$. Dann gilt

$$\mu^*(T \cap (A \cup B)) + \mu^*(T \cap (A \cup B)^c)$$

$$\begin{aligned}
&= \mu^*((T \cap A) \cup (T \cap B)) + \mu^*(T \cap A^c \cap B^c) \\
&= \mu^*((T \cap A) \cup (T \cap A^c \cap B)) + \mu^*(T \cap A^c \cap B^c) \\
&\leq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^c \cap B) + \mu^*(T \cap A^c \cap B^c).
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\mu^*(T \cap A^c \cap B) + \mu^*(T \cap A^c \cap B^c) = \mu^*(T \cap A^c),$$

da B μ^* -messbar ist, und

$$\mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^c) = \mu^*(T)$$

da A μ^* -messbar ist. Es folgt

$$\mu^*(T \cap (A \cup B)) + \mu^*(T \cap (A \cup B)^c) \leq \mu^*(T),$$

also nach Bemerkung 3.9 schon $A \cup B \in \Sigma(\mu^*)$. Damit ist $\Sigma(\mu^*)$ eine Algebra.

Wegen $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ ist $\Sigma(\mu^*)$ auch schnittstabil. Um zu zeigen, dass $\Sigma(\mu^*)$ ein Dynkin-System ist, sei $(A_n)_n$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\Sigma(\mu^*)$. Wir setzen

$$B_n = \bigcup_{j=1}^n A_j \quad \text{und} \quad B = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j.$$

Da $\Sigma(\mu^*)$ eine Algebra ist, gilt $B_n \in \Sigma(\mu^*)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zu zeigen ist $B \in \Sigma(\mu^*)$.

Sei $T \subseteq X$. Wir zeigen zunächst durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\mu^*(T \cap B_n) = \sum_{j=1}^n \mu^*(T \cap A_j).$$

Dies ist klar für $n = 1$. Gilt dies aber für ein $n \in \mathbb{N}$, so folgt

$$\begin{aligned}
\mu^*(T \cap B_{n+1}) &= \mu^*(T \cap B_{n+1} \cap B_n) + \mu^*(T \cap B_{n+1} \cap B_n^c) \\
&= \mu^*(T \cap B_n) + \mu^*(T \cap A_{n+1}) \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \mu^*(T \cap A_j),
\end{aligned}$$

womit die Aussage auch mit $n + 1$ statt n gilt. Für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt damit

$$\begin{aligned}
\mu^*(T) &= \mu^*(T \cap B_n) + \mu^*(T \cap B_n^c) \\
&\geq \mu^*(T \cap B_n) + \mu^*(T \cap B^c) \\
&= \sum_{j=1}^n \mu^*(T \cap A_j) + \mu^*(T \cap B^c).
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\mu^*(T) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(T \cap A_j) + \mu^*(T \cap B^c) \geq \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (T \cap A_j)\right) + \mu^*(T \cap B^c),$$

also

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap B) + \mu^*(T \cap B^c).$$

Damit ist $B \in \Sigma(\mu^*)$, also $\Sigma(\mu^*)$ ein Dynkin-System und nach Satz 1.14 auch eine σ -Algebra.

Für $T = B = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ folgt aus obiger Rechnung insbesondere die Ungleichung

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j).$$

Da sowieso

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$$

nach Definition des äußeren Maßes ist, gilt hier Gleichheit. Damit ist die Einschränkung von μ^* auf $\Sigma(\mu^*)$ tatsächlich ein Maß.

Es verbleibt zu zeigen, dass $\mu^*|_{\Sigma(\mu^*)}$ vollständig ist. Sei dazu $N \in \Sigma(\mu^*)$ eine Nullmenge und $M \subseteq N$. Für $T \subseteq X$ ist dann $T \cap M \subseteq N$, also $\mu^*(T \cap M) \leq \mu^*(N) = 0$ und damit

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap M^c) = \mu^*(T \cap M) + \mu^*(T \cap M^c).$$

Nach Bemerkung 3.9 ist M damit messbar. \square

Bemerkung 3.11. Eigentlich wurde im Beweis die Implikation $\mu^*(M) = 0 \Rightarrow M \in \Sigma(\mu^*)$ gezeigt. Es folgt, dass die Nullmengen der Maßes $\mu^*|_{\Sigma(\mu^*)}$ genau die Mengen $M \subseteq X$ mit $\mu^*(M) = 0$ sind.

Als nächstes zeigen wir, dass für das in Definition 3.4 konstruierte äußere Lebesgue-Maß λ^* jeder Quader und damit nach Satz 1.9 auch jede Borelmenge in $\Sigma(\lambda^*)$ liegt. Allgemeiner untersuchen wir die in Lemma 3.3 betrachtete Situation.

Lemma 3.12. *Sei $\nu: \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$ ein Inhalt auf einem Halbring $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$, sei \mathcal{R} der von \mathcal{E} erzeugte Ring, und sei $\bar{\nu}: \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ die Fortsetzung von ν zu einem Inhalt auf \mathcal{R} wie in Lemma 2.4.*

Dann erzeugen ν und $\bar{\nu}$ dasselbe äußere Maß auf X . Weiter gilt: ν ist genau dann σ -(sub)additiv, wenn $\bar{\nu}$ σ -(sub)additiv ist.

Beweis. Übungsaufgabe. \square

Es folgt aus Satz 2.6, dass ein Inhalt auf einem Halbring genau dann ein Prämaß ist, wenn er σ -subadditiv ist.

Satz 3.13 (Maßfortsetzungssatz von Hahn). *Sei $\nu: \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$ ein Inhalt auf einem Halbring \mathcal{E} , und sei μ^* das gemäß Lemma 3.3 gebildete äußere Maß. Dann gilt $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \Sigma(\mu^*)$. Insbesondere ist jede Menge im gegebenen Halbring μ^* -messbar.*

Weiter gilt $\mu^|_{\mathcal{E}} = \nu$ genau dann wenn ν ein Prämaß ist.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \Sigma(\mu^*)$. Nach Lemma 3.12, und da $\sigma(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{R})$ (Warum?), können wir annehmen, dass \mathcal{E} ein Ring ist.

Da $\Sigma(\mu^*)$ eine σ -Algebra ist, reicht es $\mathcal{E} \subseteq \Sigma(\mu^*)$ zu zeigen. Sei dazu $A \in \mathcal{E}$ und $T \subseteq X$. Zu zeigen ist dann die Ungleichung

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^c)$$

aus Bemerkung 3.9. Diese ist trivial, falls $\mu^*(T) = \infty$. Sei also $\mu^*(T) < \infty$. Dann existiert zu $\varepsilon > 0$ eine Folge $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{E} mit

$$T \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) < \mu^*(T) + \varepsilon.$$

Es folgt

$$T \cap A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cap A), \quad \text{und} \quad T \cap A^c \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cap A^c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \setminus A).$$

Da die Mengen $B_n \cap A$ und $B_n \setminus A$ zu \mathcal{E} gehören, erhalten wir

$$\mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^c) \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n \cap A) \right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n \setminus A) \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (\nu(B_n \cap A) + \nu(B_n \setminus A)) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) < \mu^*(T) + \varepsilon.$$

Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, folgt die gewünschte Ungleichung.

Wir arbeiten nun wieder mit einem Halbring \mathcal{E} . Es genügt zu zeigen, dass $\mu^*|_{\mathcal{E}} = \nu$ genau dann wenn ν σ -subadditiv ist. Falls $\mu^*|_{\mathcal{E}} = \nu$, dann ist ν direkt σ -subadditiv, da μ^* ein äußeres Maß und damit σ -subadditiv ist.

Umgekehrt nehmen wir nun an, dass ν σ -subadditiv ist. Sei $A \in \mathcal{E}$. Die Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $A_1 = A$ und $A_n = \emptyset$ für $n \geq 2$ erfüllt $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ und mit der Definition von μ^* aus Lemma 3.3 folgt

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) = \nu(A).$$

Wir zeigen nun die umgekehrte Ungleichung. Dies ist klar, falls $\mu^*(A) = \infty$. Falls $\mu^*(A) < \infty$, dann existiert zu gegebenem $\varepsilon > 0$ eine Folge $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{E} mit

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) < \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Da $B_n \cap A \in \mathcal{E}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt aus der σ -Subadditivität und der Monotonie von ν , dass

$$\nu(A) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cap A)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n \cap A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) < \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, folgt die gewünschte Ungleichung, und damit $\mu^*(A) = \nu(A)$. \square

Definition 3.14. Sei $\nu: \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$ ein Prämaß auf einem Halbring \mathcal{E} , und sei μ^* das gemäß Lemma 3.3 gebildete äußere Maß. Dann ist nach dem Satz von Caratheodory die Einschränkung $\mu^*|_{\Sigma(\mu^*)}: \Sigma(\mu^*) \rightarrow [0, \infty]$ ein Maß, welches nach dem Satz von Hahn ν fortsetzt. Wir nennen $\mu^*|_{\Sigma(\mu^*)}$ die **Caratheodory-Hahn-Fortsetzung** von ν .

Nach Korollar 3.7 ist das Elementarvolumen $\text{vol}^d: \mathcal{Q}^d \rightarrow [0, \infty]$ ein Prämaß auf dem Halbring \mathcal{Q}^d der linksoffenen, endlichen Quader im \mathbb{R}^d . Die bezüglich des assoziierten äußeren Maßes (des äußeren Lebesgue-Maßes) λ^* messbaren Mengen heißen **Lebesgue messbar**, und die σ -Algebra

$$\mathcal{L}^d := \Sigma(\lambda^*)$$

heißt **Lebesgue'sche σ -Algebra**. Die zugehörige Caratheodory-Hahn-Fortsetzung

$$\lambda^d := \lambda^*|_{\mathcal{L}^d}$$

heißt das (d -dimensionale) **Lebesgue-Maß**.

Nach Satz 1.9 und dem Satz von Hahn gilt

$$\mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{Q}^d) \subseteq \Sigma(\lambda^*) = \mathcal{L}^d.$$

Die Einschränkung von λ^d auf \mathcal{B}^d wird manchmal auch **Lebesgue-Borel-Maß** genannt. Wir sprechen aber auch einfach vom "Lebesgue-Maß auf \mathcal{B}^d ".

Damit ist gezeigt, dass sich das Elementarvolumen zu einem Maß λ^d auf \mathcal{B}^d fortsetzt, sodass $\lambda^d(Q) = \text{vol}^d(Q)$ für jeden (linksoffenen) endlichen Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^d$. Damit ist Satz 3.1 bis auf die Eindeutigkeitsbehauptung bewiesen.

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Fortsetzung eines Inhalts zu einem Maß nicht eindeutig sein muss.

Beispiel 3.15. Sei \mathcal{E} die Menge der halboffenen Quader $(a, b]$ in \mathbb{R}^d und sei $\nu: \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$ definiert durch $\nu(Q) = \infty$ falls $Q \neq \emptyset$ und $\nu(\emptyset) = 0$.

Dann sind sowohl durch das Zählmaß $\text{card}: \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$ als auch durch $\mu(A) = \infty$ falls $A \neq \emptyset$ Fortsetzungen von ν auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ definiert. (Aufgabe: Welches der beiden Maße ist die Caratheodory-Hahn-Fortsetzung?)

Die Eindeutigkeit der Fortsetzung kann aber durch eine Zusatzvoraussetzung erreicht werden.

Definition 3.16. Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Eine Mengenfunktion $\nu: \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$ heißt σ -**endlich**, falls eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{E} existiert, so dass $\nu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Satz 3.17 (Maßeindeutigkeitssatz). Seien (X, Σ) ein Messraum und \mathcal{E} ein schnittstabiler Erzeuger von Σ . Seien weiter $\mu_1, \mu_2: \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ Maße mit $\mu_1|_{\mathcal{E}} = \mu_2|_{\mathcal{E}}$. Ist dann $\mu_1|_{\mathcal{E}}$ σ -endlich, so gilt $\mu_1 = \mu_2$.

Beweis. Wir skizzieren hier den Beweis nur; siehe z.B. [Elstrodt, Satz II.5.6] oder [Werner, Satz IV.3.10].

Man zeigt zunächst den Satz unter der Voraussetzung, dass $\mu_1(X) = \mu_2(X) < \infty$ ist. Dazu zeigt man, dass die Menge

$$\mathcal{D} := \{A \in \Sigma : \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$$

ein Dynkin-System ist, das \mathcal{E} enthält (leicht). Weil \mathcal{E} schnittstabil ist, folgt mit Satz 1.14 schon $\Sigma = \sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}$, also die Behauptung.

Als nächstes zeigt man den Satz unter der Voraussetzung, dass es $A_n \in \mathcal{E}$ gibt mit $A_n \nearrow X$ und $\mu_1(A_n) < \infty$ für alle n . Dazu betrachtet man für $n \in \mathbb{N}$ die endlichen Maße

$$\mu_{j,n}(A) := \mu_j(A \cap A_n) \quad (A \in \Sigma, j = 1, 2).$$

Aus dem bereits Bewiesenen folgt dann $\mu_{1,n} = \mu_{2,n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und damit

$$\mu_1(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_1(A \cap A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_2(A \cap A_n) = \mu_2(A)$$

für jedes $A \in \Sigma$.

Im letzten Schritt führt man die allgemeine Behauptung auf den zuletzt betrachteten Fall zurück. Dazu geht man zum alternativen Erzeuger

$$\mathcal{E}' := \left\{ \bigcup_{j=1}^n A_j : n \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E} \right\}$$

über. Man muss zeigen: $\Sigma = \sigma(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}')$ (leicht), \mathcal{E}' ist schnittstabil (auch leicht) und $\mu_1|_{\mathcal{E}'} = \mu_2|_{\mathcal{E}'}$. Für Letzteres bemüht man Induktion über $n \in \mathbb{N}$ zum Beweis der Aussage:

$$\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E} : \mu_1\left(\bigcup_{j \leq n} A_j\right) = \mu_2\left(\bigcup_{j \leq n} A_j\right).$$

Dies ist eine mittelschwere ÜA. □

Spezialfall: Das Elementarvolumen auf \mathcal{Q}^d ist offensichtlich σ -endlich (wähle etwa $A_n = (-n, n]^d$ für $n \in \mathbb{N}$.) Also kann es nach Satz 3.17 nur höchstens ein Maß auf \mathcal{B}^d geben, welches das Elementarvolumen fortsetzt. Damit ist der Satz vom Lebesgue-Maß (Satz 3.1) vollständig bewiesen.

4 Eigenschaften des Lebesgue-Maßes

In den vorigen Kapiteln haben wir das Lebesgue-Maß λ^d auf der Lebesgue'schen σ -Algebra \mathcal{L}^d konstruiert. Solange d feststeht, schreibt man der Einfachheit halber

$$\lambda := \lambda^d, \quad \mathcal{L} := \mathcal{L}^d.$$

Es gilt $\mathcal{B}^d \subseteq \mathcal{L}^d$.

In diesem Abschnitt wollen wir weitere Eigenschaften des Lebesgue-Maßes und der Lebesgue messbaren Mengen kennenlernen. Zunächst stellen wir uns die Frage, wie "groß" eigentlich \mathcal{L}^d im Vergleich mit \mathcal{B}^d ist. Hierbei ist folgender Satz wichtig.

Satz 4.1. Für eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^d$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) $M \in \mathcal{L}^d$.
- (2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $M \subseteq U$ und $\lambda^*(U \setminus M) < \varepsilon$.
- (3) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^d$ und eine abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $A \subseteq M \subseteq U$ und $\lambda(U \setminus A) < \varepsilon$.
- (4) Es gibt eine G_δ -Menge $U \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $M \subseteq U$ und $\lambda^d(U \setminus A) = 0$.
- (5) Es gibt eine F_σ -Menge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $A \subseteq M$ und $\lambda^d(M \setminus A) = 0$.

Dabei heißt eine als abzählbarer Durchschnitt offener Mengen darstellbare Menge eine **G_δ -Menge**, und eine als abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen darstellbare Menge heißt **F_σ -Menge**.

Beweis. ‘(1) \Rightarrow (2)’: Sei zunächst $\lambda(M) < \infty$. Dann gilt $\lambda^*(M) = \lambda(M) < \infty$ und nach Konstruktion von λ^* und mithilfe von Lemma 3.5 können wir zu gegebenem $\varepsilon > 0$ eine Folge $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offener, endlicher Quader wählen, sodass

$$M \subseteq U := \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \text{vol}(Q_n) < \lambda^*(M) + \varepsilon = \lambda(M) + \varepsilon.$$

Es ist U offen und

$$\lambda(U \setminus M) = \lambda(U) - \lambda(M) \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \text{vol}(Q_n) \right) - \lambda(M) < \varepsilon.$$

Ist aber $\lambda(M) = \infty$, so wendet man für jedes $n \in \mathbb{N}$ das bereits Bewiesene auf $M_n := M \cap [-n, n]^d$ an und erhält eine offene Menge U_n mit $M_n \subseteq U_n$ und $\lambda(U_n \setminus M_n) < \varepsilon/2^n$. Jetzt leistet $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ das Verlangte.

‘(2) \Rightarrow (4)’: Nach (2) existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine offene Menge U_n mit $M \subseteq U_n$ und $\lambda^*(U_n \setminus M) < 1/n$. Die Behauptung folgt mit der G_δ -Menge $U := \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$.

‘(4) \Rightarrow (1)’: Sei U eine G_δ -Menge wie in (4). Wegen $\lambda^*(U \setminus M) = 0$ und Bemerkung 3.11 gilt $U \setminus M \in \mathcal{L}^d$. Außerdem ist U offensichtlich Borel- und also auch Lebesgue-messbar. Es folgt $M = U \setminus (U \setminus M) \in \mathcal{L}^d$.

‘(4) \Leftrightarrow (5)’: Das folgt durch Übergang zu Komplementen (wie?).

‘(3) \Rightarrow (2)’: Das folgt aus der Monotonie von λ^* (wie?).

‘(2) \Rightarrow (3)’: Es gelte (2). Wir haben bereits ‘(1) \Leftrightarrow (2)’ gezeigt. Es folgt daher $M \in \mathcal{L}$, und somit auch $M^c \in \mathcal{L}$. Nun wenden wir (2) auf M und M^c an. Dies liefert zu $\varepsilon > 0$ eine offene Menge U und eine abgeschlossene Menge A , sodass

$$M \subseteq U, \quad \lambda(U \setminus M) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad M^c \subseteq A^c, \quad \text{und} \quad \lambda(A^c \setminus M^c) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daraus folgt $A \subseteq M \subseteq U$ und $\lambda(U \setminus A) < \varepsilon$ (wie?). □

Bemerkung 4.2. Gemäß Definition 2.11 und Bemerkung 3.11 sind für $N \subseteq \mathbb{R}^d$ die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) $\lambda^*(N) = 0$.
- (2) $N \in \mathcal{L}^d$ und $\lambda(N) = 0$.
- (3) N ist Nullmenge bezüglich $\lambda|_{\mathcal{B}^d}$.

Solche Mengen werden einfach **Lebesgue-Nullmengen** genannt.

Da eine F_σ -Menge eine Borelmenge ist, folgt aus Satz 4.1 also, dass eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^d$ genau dann Lebesgue-messbar ist, wenn sie von der Form $M = B \cup N$ ist mit einer Borelmenge (genauer: F_σ -Menge) und einer Nullmenge N . Also ist das Lebesgue-Maß einfach die Vervollständigung des Lebesgue-Borel-Maßes.

Man kann zeigen: die ‘Mächtigkeit’ von \mathcal{B}^d ist die des Kontinuums, d.h., es gibt eine Bijektion $\mathcal{B}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Aber \mathcal{L}^d hat die Mächtigkeit von $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, und ist demnach unvergleichlich viel größer als \mathcal{B} .

Wir zeigen nun eine Verschärfung der Eindeutigkeitsaussage aus Satz 3.1.

Satz 4.3 (Eindeutigkeitsatz für das Lebesgue-Maß). *Sei μ ein Maß auf der Borel-Algebra \mathcal{B}^d sodass $\mu(Q) = \text{vol}(Q)$ für alle dyadischen, linksoffenen Würfel Q . Dann ist $\mu = \lambda^d$.*

Hier heißt ein linksoffener Quader $(a, b]$ *dyadisch*, falls alle ‘‘Eckkoordinaten’’ a_j, b_j in der Menge $\{k/2^n : k, n \in \mathbb{Z}\}$ liegen.

Beweis. Aus Lemma 1.8 wissen wir, dass jede offene Menge abzählbare, disjunkte Vereinigung von linksoffenen Würfeln ist. Aus dem Beweis geht hervor, dass diese Würfel alle als dyadisch angenommen werden können. Es gilt daher $\mu(O) = \lambda^d(O)$ für jede offene Teilmenge $O \subseteq \mathbb{R}^d$. Die offenen Teilmengen bilden einen schnittstabilen Erzeuger von \mathcal{B}^d und λ^d ist σ -endlich auf diesem Erzeuger. Also greift der Maßeindeutigkeitsatz (Satz 3.17) und liefert $\mu = \lambda^d$ wie behauptet. \square

Wir wollen als nächstes zeigen, dass das Lebesgue-Maß ‘‘translations-invariant’’ ist. Dazu müssen wir zuerst einen Begriff von gutartigen Abbildungen zwischen Messräumen definieren. Wir erinnern uns, dass eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen stetig ist, wenn Urbilder offener Mengen offen sind, d.h., falls für jede offene Teilmenge U von Y auch das Urbild $f^{-1}(U)$ offen ist. Die folgende Definition ist ganz analog.

Definition 4.4. Seien (X, Σ) und (X', Σ') Messräume. Eine Abbildung $f: X' \rightarrow X$ heißt **messbar** wenn für jede messbare Teilmenge B von X auch das Urbild $f^{-1}(B)$ messbar ist, d.h. wenn $f^{-1}(B) \in \Sigma'$ für alle $B \in \Sigma$.

Genauer heißt f auch (Σ', Σ) -**messbar**. Wir schreiben auch, dass $f: (X', \Sigma') \rightarrow (X, \Sigma)$ messbar ist.

Beispiele 4.5. a) Jede konstante Abbildung $f: X' \rightarrow X$, d.h. $f(x') = x_0 \in X$ für ein festes $x_0 \in X$ und alle $x' \in X'$ ist messbar. (Warum?)

b) Wir betrachten für $A \subseteq X$ die charakteristische Funktion $\mathbf{1}_A: X \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Dann ist $\mathbf{1}_A^{-1}(B) \in \{\emptyset, A, A^c, X\}$ für alle $B \subseteq \mathbb{R}$. Für messbares A ist also $\mathbf{1}_A$ messbar, und legt man auf \mathbb{R} die Borelsche σ -Algebra zu Grunde (oder irgendeine andere σ -Algebra, in der 0 und 1 nicht immer in der gleichen Menge liegen), so gilt auch die Umkehrung.

Aufgabe. Seien (X, Σ) und (X', Σ') Messräume und $f: X' \rightarrow X$. Zeigen Sie: die Mengensysteme

$$f^{-1}(\Sigma) := \{f^{-1}(B) : B \in \Sigma\} \quad \text{und} \quad f_*(\Sigma') := \{B \subseteq X : f^{-1}(B) \in \Sigma'\}$$

sind σ -Algebren auf X' bzw. X . Und f ist genau dann messbar, wenn $f^{-1}(\Sigma) \subseteq \Sigma'$, und genau dann wenn $\Sigma \subseteq f_*(\Sigma')$.

Satz 4.6. *Seien (X, Σ) und (X', Σ') Messräume und $f: X' \rightarrow X$. Sei \mathcal{E} Erzeuger von Σ , d.h. $\Sigma = \sigma(\mathcal{E})$. Dann ist f genau dann messbar, falls $f^{-1}(E) \in \Sigma'$ ist für alle $E \in \mathcal{E}$.*

Beweis. Wegen $\mathcal{E} \subseteq \Sigma$ folgt, dass für messbares f die im Satz genannte Bedingung gilt.

Für die umgekehrte Richtung gelte nun diese Bedingung. Das heißt, es gilt

$$\mathcal{E} \subseteq f_*(\Sigma') := \{B \subseteq X : f^{-1}(B) \in \Sigma'\}.$$

Man prüft leicht nach (siehe Aufgabe oben), dass $f_*(\Sigma')$ eine σ -Algebra auf X ist. Also gilt $\Sigma = \sigma(\mathcal{E}) \subseteq f_*(\Sigma')$, d.h. f ist (Σ', Σ) -messbar. \square

In metrischen Räumen legen wir stets die Borelsche σ -Algebra zu Grunde. Sind also X und Y metrische Räume, so heißt $f: X \rightarrow Y$ **messbar** (genauer **Borel-messbar**), falls dies bezüglich der σ -Algebren $\mathcal{B}(X)$ und $\mathcal{B}(Y)$ gilt.

Satz 4.7. Seien X und Y metrische Räume und sei $f: X \rightarrow Y$ stetig. Dann ist f (Borel-)messbar.

Beweis. Nach Definition wird $\mathcal{B}(Y)$ vom System der offenen Teilmengen von Y erzeugt. Um zu zeigen, dass f messbar ist, genügt es also nach Satz 4.6 zu zeigen, dass $f^{-1}(M) \in \mathcal{B}(X)$ für alle offenen Teilmengen $M \subseteq Y$. Aus der Stetigkeit von f folgt aber direkt, dass $f^{-1}(M)$ offen (und damit auch $f^{-1}(M) \in \mathcal{B}(X)$) für alle offenen $M \subseteq Y$. \square

Definition und Satz 4.8. Sei $f: (X', \Sigma') \rightarrow (X, \Sigma)$ messbar und sei μ ein Maß auf Σ' , also (X', Σ', μ) Maßraum. Dann ist durch $f_*\mu: \Sigma \rightarrow [0, \infty]$, definiert durch

$$(f_*\mu)(B) := \mu(f^{-1}(B))$$

für $B \in \Sigma$, ein Maß $f_*\mu$ auf Σ gegeben, das sogenannte **Bildmaß von μ unter f** .

Beweis. Zunächst notieren wir, dass wegen der Messbarkeit von f für $B \in \Sigma$ auch $f^{-1}(B) \in \Sigma'$ gilt, also $f_*\mu$ definiert ist.

Striktheit: Es gilt $(f_*\mu)(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$.

σ -Additivität: Sei $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in Σ . Dann sind die Urbilder $f^{-1}(B_n)$ paarweise disjunkt und es folgt

$$\begin{aligned} (f_*\mu)\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) &= \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(f^{-1}(B_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} (f_*\mu)(B_n). \end{aligned} \quad \square$$

Der einfache Beweis des folgenden Satzes sei als Übung gelassen.

Satz 4.9. Seien $f: (X'', \Sigma'') \rightarrow (X', \Sigma')$ und $g: (X', \Sigma') \rightarrow (X, \Sigma)$ messbare Abbildungen. Dann ist auch $g \circ f: (X'', \Sigma'') \rightarrow (X, \Sigma)$ messbar.

Ist weiter μ ein Maß auf Σ'' , so gilt $(g \circ f)_*\mu = g_*(f_*\mu)$.

Als Beispiel für ein Bildmaß betrachten wir für $c \in \mathbb{R}^d$ die **Translation** $T_c: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, gegeben durch $T_c(x) = x + c$ für $x \in \mathbb{R}^d$. Da T_c stetig ist, ist T_c auch Borel-messbar.

Für $M \subseteq \mathbb{R}^d$ schreiben wir auch $c + M$ für $T_c(M)$, d.h. $c + M = \{c + x : x \in M\}$. Es gilt $T_c^{-1} = T_{-c}$ und daher $T_c^{-1}(M) = -c + M = M - c$.

Satz 4.10. Das Lebesgue-Borel-Maß $\lambda|_{\mathcal{B}}$ ist **translationsinvariant**: für alle $c \in \mathbb{R}^d$ gilt $(T_c)_*(\lambda|_{\mathcal{B}^d}) = \lambda|_{\mathcal{B}^d}$, d.h.

$$(T_c)_*(\lambda)(E) = \lambda(E)$$

für jede Borel-Menge $E \subseteq \mathbb{R}^d$.

Ist umgekehrt μ ein translationsinvariantes Maß auf \mathcal{B}^d mit $\mu((0, 1]^d) = \alpha \in [0, \infty)$, so gilt $\mu = \alpha \cdot \lambda$.

Beweis. Für $c \in \mathbb{R}^d$ und einen Quader $Q = (a, b] \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $a_j \leq b_j$ für $1 \leq j \leq d$ gilt

$$(T_c)_*(\lambda)(Q) = \lambda(Q - c) = \lambda((a - c, b - c]) = \prod_{j=1}^d (b_j - a_j) = \lambda((a, b]) = \lambda(Q).$$

Nach dem Maßeindeutigkeitssatz 3.17 (oder auch aus Satz 4.3) folgt hieraus, dass $(T_c)_*(\lambda)$ und λ auf \mathcal{B} übereinstimmen.

Sei nun μ translationsinvariantes Maß auf \mathcal{B}^d mit $\alpha := \mu((0, 1]^d) \in [0, \infty)$. Ist $\alpha = 0$, so ist $\mu = 0 = o\lambda$ (warum?). Ohne Einschränkung kann also $\alpha = 1$ angenommen werden (man gehe zu $\frac{1}{\alpha}\mu$ über). Sind W, W' zwei linksoffene Würfel mit derselben Kantenlänge, so gehen sie durch Translation auseinander hervor, haben also dasselbe μ -Maß. Der Einheitswürfel $(0, 1]^d$ ist disjunkte Vereinigung von 2^{nd} dyadischen Würfeln der Kantenlänge 2^{-n} . Also stimmen μ und λ auf linksoffenen, dyadischen Würfeln überein. Die Behauptung folgt nun aus Satz 4.3. \square

Als weiteres Beispiel für Bildmaße betrachten wir *lineare* Abbildungen $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$. Diese sind Borel-messbar, weil sie stetig sind. Es ergibt also Sinn, das Maß $T_*\lambda$ auf \mathcal{B}^d zu betrachten. Für invertierbares T hat man folgenden Sachverhalt.

Satz 4.11. *Sei $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ linear und invertierbar. Dann gilt*

$$(T_*)(\lambda|_{\mathcal{B}^d}) = |\det T|^{-1} \lambda|_{\mathcal{B}^d}.$$

Für jedes $B \in \mathcal{B}^d$ gilt außerdem $T(B) \in \mathcal{B}^d$ und $\lambda(T(B)) = |\det T| \lambda(B)$.

Beweis. Die zweite Behauptung ergibt sich aus der ersten, indem man T durch T^{-1} ersetzt. Der Beweis der ersten Behauptung, den wir hier nur skizzieren, erfolgt in mehreren Schritten.

1. Zunächst macht man sich klar, dass $(T_*)(\lambda|_{\mathcal{B}^d})$ translationsinvariant ist. Dies folgt aus

$$(T_*\lambda)(B-c) = \lambda(T^{-1}(B-c)) = \lambda(T^{-1}(B) - T^{-1}(c)) = \lambda(T^{-1}(B)) = (T_*\lambda)(B)$$

für alle $c \in \mathbb{R}^d$ und $B \in \mathcal{B}^d$.

Nun setzt man $\alpha = \alpha(T) := (T_*)(\lambda|_{\mathcal{B}^d})([0, 1]^d) = \lambda(T^{-1}([0, 1]^d))$ und beobachtet dass $0 < \alpha < \infty$ sein muss (warum?). Nach Satz 4.10 gilt $(T_*)(\lambda|_{\mathcal{B}^d}) = \alpha \cdot \lambda|_{\mathcal{B}^d}$.

2. Als nächstes betrachtet man den Spezialfall $T = \text{diag}(c_1, \dots, c_d)$ für reelle Zahlen $c_j \neq 0$. Sind alle $c_j > 0$, so erhält man

$$\alpha(T) = \lambda(T^{-1}([0, 1]^d)) = \lambda([0, \frac{1}{c_1}] \times \dots \times [0, \frac{1}{c_d}]) = \frac{1}{c_1 \dots c_d} = |\det T|^{-1}.$$

Im allgemeinen Fall muss man, falls $c_j < 0$ ist, in dieser Rechnung das Intervall $(0, \frac{1}{c_j}]$ durch $[\frac{1}{c_j}, 0)$ ersetzen. Das Ergebnis bleibt aber dasselbe.

3. Nun betrachtet man einen weiteren Spezialfall, nämlich den, dass T eine *orthogonale* Matrix ist, d.h. es gilt $\|Tx\|_2 = \|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$. (Alternativ: $T^{-1} = T^t$, oder auch $TT^t = 1$, wobei 1 die Einheitsmatrix bzw. die Identitätsabbildung ist.) Für die euklidische Einheitskugel $B := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 \leq 1\}$ gilt dann $T^{-1}(B) = B$ und es folgt

$$\alpha(T)\lambda(B) = T_*(\lambda|_{\mathcal{B}^d})(B) = \lambda(T^{-1}(B)) = \lambda(B).$$

Also gilt dann $\alpha(T) = 1$.

4. Es gilt die Identität

$$\alpha(TS) = \alpha(T)\alpha(S)$$

für invertierbare lineare Abbildungen $T, S: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$. Diese folgt aus

$$\begin{aligned} \alpha(TS) \cdot \lambda|_{\mathcal{B}^d} &= (TS)_*(\lambda|_{\mathcal{B}^d}) = T_*(S_*(\lambda|_{\mathcal{B}^d})) = T_*(\alpha(S) \cdot \lambda|_{\mathcal{B}^d}) \\ &= \alpha(S) \cdot (T_*)(\lambda|_{\mathcal{B}^d}) = \alpha(S)\alpha(T) \cdot \lambda|_{\mathcal{B}^d}. \end{aligned}$$

5.) Im letzten Schritt benutzt man, dass eine beliebige lineare Abbildung $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ immer in der Form $T = S_1DS_2$ geschrieben werden kann, wobei S_1, S_2 orthogonal sind und D diagonal ist. Um dies zu sehen, notieren wir zunächst, dass TT^t eine positiv definite, symmetrische Matrix ist. Nach dem Satz über die Hauptachsentransformation existiert damit eine orthogonale Matrix S_1 , für die $S_1^tTT^tS_1$ eine Diagonalmatrix mit positiven Einträgen ist. Wir können diese Matrix in der Form D^2 mit einer Diagonalmatrix D mit positiven Einträgen schreiben, d.h. $S_1^tTT^tS_1 = D^2$. Nun ist auch $S_2 := D^{-1}S_1^tT$ orthogonal, denn

$$S_2S_2^t = D^{-1}S_1^tTT^tS_1D^{-1} = 1.$$

Es gilt $S_1DS_2 = S_1DD^{-1}S_1^tT = T$. Daraus folgt

$$\alpha(T) = \alpha(S_1)\alpha(D)\alpha(S_2) = \alpha(D) = |\det D|^{-1} = |\det(S_1DS_2)|^{-1} = |\det T|^{-1}$$

mit 4. und dem Determinantenmultiplikationssatz. \square

Bemerkung 4.12. Was passiert, wenn T nicht invertierbar, also $\det T = 0$ ist? Dann ist $U := T(\mathbb{R}^d)$ ein Unterraum einer Dimension $< d$. Dieser “trägt” das Maß $T_*\lambda$ in dem Sinn, dass $(T_*\lambda)(U^c) = 0$ ist.

Im Gegensatz zum Bildmaß, bei dem es immer um “inverse Bilder” geht, kann man aber auch “Vorwärtsbilder” betrachten. Weil U eine Nullmenge ist (warum?) gilt dann immer $\lambda(T(B)) = 0 = |\det T| \lambda(B)$ für alle $B \in \mathcal{L}^d$. Die zweite Aussage von Satz 4.11 bleibt also auch in diesem Fall richtig, wenn man das Lebesgue-Maß auf \mathcal{L}^d betrachtet. Insbesondere gilt $T(B) \in \mathcal{L}^d$ für jedes $B \in \mathcal{L}^d$. Überraschenderweise gibt es im Allgemeinen Borelmengen $B \subseteq \mathbb{R}^d$ derart, dass $T(B)$ keine Borelmenge ist.

Als einfaches Beispiel betrachten wir die Projektion auf die erste Koordinate $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch $P(x, y) = x$. Man sieht leicht, dass P **offen** ist, d.h. für jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ist auch $P(U) \subseteq \mathbb{R}$ offen. Die Borelmengen sind die kleinste Menge, die alle offenen Mengen enthält, und die unter abzählbaren Vereinigungen und Durchschnitten absteigender Folgen abgeschlossen ist. Es ist naheliegend zu denken, dass P sowohl abzählbare Vereinigungen und Durchschnitte absteigender Folgen erhält und daher Borelmengen in \mathbb{R}^2 of Borelmengen in \mathbb{R} abbildet. Dies dachte auch Lebesgue (um 1905), und es ist einer der berühmtesten Fehler in der Mathematik, denn Suslin zeigte etwa 10 Jahre später, dass P nicht alle Borelmengen in \mathbb{R}^2 auf Borelmengen abbildet. Der Denkfehler ist, dass P Durchschnitte absteigender Folgen erhält.

In dieser Hinsicht verhält sich also \mathcal{L}^d besser als \mathcal{B}^d .

Bemerkung 4.13. Man kann zeigen, dass nicht nur das Lebesgue-Borel-Maß sondern auch dessen Vervollständigung (also das Lebesgue-Maß) translationsinvariant ist.

In Präsenzaufgabe 3(b) auf Übungsblatt 2 haben wir bereits sogenannte Vitali-Mengen kennengelernt: eine Menge $M \subseteq [0, 1]$, sodass $[0, 1] \subseteq \bigsqcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]} (q + M) \subseteq [0, 2]$. Diese Menge ist nicht Lebesgue-messbar, denn sonst würde für $A := \bigsqcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]} (q + M)$ gelten, dass

$$\lambda(A) = \lambda\left(\bigsqcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]} (q + M)\right) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]} \lambda(q + M) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]} \lambda(M) \in \{0, \infty\}$$

was aber im Widerspruch zu

$$1 = \lambda([0, 1]) \leq \lambda(A) \leq \lambda([0, 2]) = 2$$

steht.

Es gilt insbesondere $\mathcal{L} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$, und daher auch $\mathcal{L}^d \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$.

Das gleiche Argument zeigt auch, dass es kein translationsinvariantes Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ gibt, für welches $(0, 1]^d$ endliches und strikt positives Maß hat.

5 Integration messbarer Funktionen

Für einen Maßraum (X, Σ, μ) wollen wir nun das Integral $\int_X f d\mu$ für (bestimmte) messbare Funktionen $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ definieren. Falls der Raum X oder das Maß μ klar sind, schreiben wir auch einfach $\int f d\mu$ oder $\int f$. Wir gehen dabei in Schritten vor:

1. Das Integral einer charakteristischen Funktion $\mathbf{1}_A$ (mit $A \in \Sigma$) ist $\int \mathbf{1}_A := \mu(A)$.
2. Das Integral einer *einfachen Funktion* $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$ (mit $\alpha_j \in \mathbb{R}$ und $A_j \in \Sigma$) ist $\int f := \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j)$.
3. Das Integral einer positiven, messbaren Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ ist

$$\int f = \sup\left\{\int g : g \text{ einfache Funktion mit } 0 \leq g \leq f\right\}.$$

4. Für eine beliebige messbare Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten wir den positiven und negativen Teil $f_+, f_-: X \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$ und $f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$. Falls $\int f_+$ und $\int f_-$ endlich sind, nennen wir f *integrierbar* und definieren $\int f := \int f_+ - \int f_-$.

5.1 (Die erweiterten reellen Zahlen). Allgemeiner betrachten wir Funktion mit Werten in den **erweiterten reellen Zahlen**

$$\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Der Vorteil ist, dass jede Teilmenge von $\overline{\mathbb{R}}$ ein Supremum und ein Infimum hat. Wir benutzen die Regeln:

- $a + \infty = \infty$ für $a \in (-\infty, \infty]$;
- $a - \infty = -\infty$ für $a \in [-\infty, \infty)$;
- $a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ für $a \in (0, \infty]$;
- $a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$ für $a \in [-\infty, 0)$.
- $0 \cdot (\pm\infty) = 0$.

Der Ausdruck “ $\infty - \infty$ ” bleibt weiterhin undefiniert.

Es ist leicht zu sehen, dass auf $\overline{\mathbb{R}}$ durch

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \{M \subseteq \overline{\mathbb{R}} : M \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

eine σ -Algebra definiert ist. (Z.B. so: $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \iota_*(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, wobei $\iota : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ die Inklusionsabbildung ist.) Wir werden bei Abbildungen nach $\overline{\mathbb{R}}$ (oder \mathbb{R}) im Folgenden immer diese σ -Algebra zu Grunde legen.

Man kann $\overline{\mathbb{R}}$ mittels $d(x, y) := \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|$ zu einem kompakten metrischen Raum machen, der in offensichtlicher Weise zum Intervall $[-1, 1]$ homöomorph ist. Diese Metrik induziert den üblichen Konvergenzbegriff auf $\overline{\mathbb{R}}$, und $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ ist genau die zugehörige Borel-algebra.

5.2 (Sub- und Superniveaumengen). Sei $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Für $a \in \overline{\mathbb{R}}$ heißt

$$[f \leq a] := \{x \in X : f(x) \leq a\} = f^{-1}([-\infty, a]).$$

die **Subniveaumenge** von f bezüglich a . Analog bezeichnet $[f \geq a]$ die Superniveaumenge, und allgemeiner sind $[f < a]$ oder auch $[f \leq g]$ mit Funktionen f und g definiert. Man hat also z.B. $[f \in B] = f^{-1}(B)$ für eine Menge $B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$.

Analog zu Satz 1.9 sieht man, dass $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ von den Intervallen $[-\infty, a]$ mit $a \in \mathbb{Q}$ (oder auch $a \in \mathbb{R}$) erzeugt wird, ebenso auch von den Intervallen $[-\infty, a)$, $[a, \infty)$, und (a, ∞) , wiederum sowohl für $a \in \mathbb{Q}$ und $a \in \mathbb{R}$. Aus Satz 4.6 erhalten wir:

Satz 5.3. Sei (X, Σ) ein Messraum, und $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

- (1) f ist messbar;
- (2) $[f \leq a] \in \Sigma$ für alle $a \in \mathbb{Q}$ (äquivalent: alle $a \in \mathbb{R}$);
- (3) $[f < a] \in \Sigma$ für alle $a \in \mathbb{Q}$ (äquivalent: alle $a \in \mathbb{R}$);
- (4) $[f \geq a] \in \Sigma$ für alle $a \in \mathbb{Q}$ (äquivalent: alle $a \in \mathbb{R}$);
- (5) $[f > a] \in \Sigma$ für alle $a \in \mathbb{Q}$ (äquivalent: alle $a \in \mathbb{R}$).

Satz 5.4. Sei (X, Σ) ein Messraum. Eine Funktion $f = (f_1, \dots, f_d) : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ ist genau dann messbar, wenn jede Koordinatenfunktion $f_j : X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar ist.

Beweis. Für $j \in \{1, \dots, d\}$ ist die durch $(x_1, \dots, x_d) \rightarrow x_j$ definierte Projektionsabbildung $\pi_j : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und damit nach Satz 4.7 messbar. Nach Satz 4.9 ist damit auch $f_j = \pi_j \circ f$ messbar.

Seien jetzt umgekehrt alle f_j messbar. Für einen Quader $(a, b]$, mit $a = (a_1, \dots, a_d)$ und $b = (b_1, \dots, b_d)$, ist dann

$$f^{-1}((a, b]) = \bigcap_{j=1}^d f_j^{-1}((a_j, b_j]) \in \Sigma.$$

Da $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ nach Satz 1.9 von diesen Quadern erzeugt wird, folgt die Behauptung nach Satz 4.6. \square

Satz 5.5. *Seien (X, Σ) ein Messraum, und $f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann sind auch folgende Funktionen messbar:*

- (1) cf für alle $c \in \mathbb{R}$;
- (2) der **positive Teil** f_+ , definiert durch $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$ für $x \in X$;
- (3) der **negative Teil** f_- , definiert durch $f_-(x) := \max\{-f(x), 0\}$ für $x \in X$;
- (4) $|f|^p$ für alle $p \in [1, \infty)$;
- (5) $f + g$, falls überall definiert (d.h. es gibt kein $x \in X$ mit $f(x) = \infty$ und $g(x) = -\infty$, bzw. umgekehrt);
- (6) fg , gegeben durch $(fg)(x) := f(x) \cdot g(x)$ für $x \in X$.

Beweis. (1)-(4) folgen daraus, dass nach Satz 4.9 die Verkettung messbarer Abbildungen wieder messbar ist, und dass die folgenden Abbildungen $\overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ stetig und damit messbar sind: $x \mapsto cx$, $x \mapsto \max\{x, 0\}$ und $x \mapsto \max\{-x, 0\}$, $x \mapsto |x|^p$.

Für (5) setzen wir

$$X_\infty := [f \in \{\infty, -\infty\}] \cup [g \in \{\infty, -\infty\}].$$

Dann ist X_∞ messbar, und auf $X_f := X \setminus X_\infty$ nehmen f und g nur endliche Werte an. Nach Satz 5.4 ist $h: X_f \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (f(x), g(x))$ messbar. Die Summenabbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $s(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, ist stetig und damit messbar. Es gilt

$$(f + g)|_{X_f} = s \circ h$$

und damit ist $(f + g)|_{X_f}$ messbar nach Satz 4.9 (bezüglich der Spur- σ -Algebra $\Sigma|_{X_f}$).

Auf X_∞ nimmt $f + g$ nur die Werte ∞ oder $-\infty$, und eine Fallunterscheidung zeigt, dass $(f + g)|_{X_\infty}$ messbar ist. Es folgt, dass $f + g$ messbar ist.

Analog sieht man, dass fg messbar ist. \square

Satz 5.6. *Sei (X, Σ) ein Messraum und sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen $X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Dann sind auch die (punktweise definierten) Funktionen*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n, \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n \quad \text{und} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$$

messbar. Insbesondere ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ messbar, wenn der Grenzwert existiert.

Beweis. Die Messbarkeit des Supremums folgt aus Satz 5.3 und

$$\left[\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \leq a \right] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [f_n \leq a] \in \Sigma.$$

Die Messbarkeit des Infimums folgt analog. Die Messbarkeit von Limes superior und inferior folgt aus

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{k \geq n} f_k \right) \quad \text{und} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{k \geq n} f_k \right). \quad \square$$

Wir definieren als nächstes die Menge der einfachen Funktionen, deren Integral, und zeigen dass dieser Integralbegriff die erwartbaren Eigenschaften besitzt.

Definition 5.7. Sei (X, Σ) ein Messraum. Eine messbare Funktion $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt **einfache Funktion**, wenn sie nur endlich viele reelle Werte annimmt, d.h., wenn $f(X)$ eine endliche Teilmenge von \mathbb{R} ist.

Ist f einfache Funktion und $f(X) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, wobei wir die α_j als verschieden annehmen, so gilt mit $A_j := [f = \alpha_j] \in \Sigma$ also

$$f = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}.$$

Wir nennen dies die **kanonische Darstellung** von f . Eine einfache Funktion kann auch auf viele andere Arten dargestellt werden. Beispielsweise ist

$$\mathbf{1}_{(1,3]} + \mathbf{1}_{(2,4]} = \mathbf{1}_{(1,2]} + 2 \cdot \mathbf{1}_{(2,3]} + \mathbf{1}_{(3,4]} = 1 \cdot \mathbf{1}_{(1,2] \cup (3,4]} + 2 \cdot \mathbf{1}_{(2,3]} + 0 \cdot \mathbf{1}_{(-\infty,1] \cup (4,\infty)}.$$

Die Darstellung auf der rechten Seite ist (für $X = \mathbb{R}$) die kanonische.

Leicht sieht man, dass Summe und skalares Vielfaches von einfachen Funktionen wieder einfache Funktionen sind. Für eine einfache Funktion $f = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$ und $M \in \Sigma$, gilt

$$f \mathbf{1}_M = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{1}_{A_j \cap M}.$$

Es folgt, dass auch das Produkt von einfachen Funktionen wieder eine einfache Funktion ist.

Definition 5.8. Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum, und $f: X \rightarrow [0, \infty]$ eine einfache Funktion mit kanonischer Darstellung

$$f = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}.$$

Dann heißt

$$\int_X f d\mu := \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j)$$

das **(μ -)Integral von f** . Wir schreiben auch $\int f d\mu$, oder $\int_X f$, oder $\int f$.

Ist $M \in \Sigma$, so heißt

$$\int_M f d\mu := \int_X f \mathbf{1}_M d\mu = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j \cap M)$$

das **(μ -)Integral von f über M** . Wir schreiben auch $\int_M f$.

Lemma 5.9. Seien (X, Σ, μ) ein Maßraum und $f: X \rightarrow [0, \infty]$ eine einfache Funktion. Dann ist durch $\nu: \Sigma \rightarrow [0, \infty]$, $\nu(A) = \int_A f d\mu$, ein Maß definiert.

Beweis. Sei

$$f = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$$

die kanonische Darstellung von f .

Striktheit: Offensichtlich ist $\nu(\emptyset) = 0$.

σ -Additivität: Sei $(B_l)_{l \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in Σ . Mit $B := \bigcup_{l=1}^{\infty} B_l$ gilt:

$$\nu(B) = \int_B f d\mu = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j \cap B)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu \left(\bigcup_{l=1}^{\infty} (A_j \cap B_l) \right) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \sum_{l=1}^{\infty} \mu(A_j \cap B_l) \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j \cap B_l) = \sum_{l=1}^{\infty} \nu(B_l). \quad \square
\end{aligned}$$

Wir stellen einige Rechenregeln zusammen.

Lemma 5.10. Seien (X, Σ, μ) Maßraum, $M, N \in \Sigma$ und $f, g: X \rightarrow [0, \infty]$ einfache Funktionen. Dann gilt:

- (1) $\int_M (f + g) d\mu = \int_M f d\mu + \int_M g d\mu$.
- (2) Für $\alpha \geq 0$ gilt $\int_M \alpha f d\mu = \alpha \int_M f d\mu$.
- (3) Ist $f \leq g$, so ist $\int_M f d\mu \leq \int_M g d\mu$.
- (4) Ist $\mu(M) = 0$, so ist $\int_M f d\mu = 0$.
- (5) Ist $M \subseteq N$, so ist $\int_M f d\mu \leq \int_N f d\mu$.

Beweis. (1) Seien

$$f = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{1}_{A_j} \quad \text{und} \quad g = \sum_{k=1}^n \beta_k \mathbf{1}_{B_k}$$

die kanonischen Darstellungen von f und g . Die Mengen $E_{jk} := A_j \cap B_k \cap M$ sind dann paarweise disjunkt und es gilt wegen $\bigcup_{j=1}^m A_j = \bigcup_{k=1}^n B_k = X$

$$A_j \cap M = \bigcup_{k=1}^n E_{jk}, \quad B_k \cap M = \bigcup_{j=1}^m E_{jk} \quad \text{und} \quad M = \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{k=1}^n E_{jk}.$$

Daher folgt mit Lemma 5.9

$$\begin{aligned}
\int_M (f + g) d\mu &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \int_{E_{j,k}} (f + g) d\mu \\
&\stackrel{(*)}{=} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (\alpha_j + \beta_k) \mu(E_{j,k}) \\
&= \sum_{j=1}^m \alpha_j \sum_{k=1}^n \mu(E_{j,k}) + \sum_{k=1}^n \beta_k \sum_{j=1}^m \mu(E_{j,k}) \\
&= \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j \cap M) + \sum_{k=1}^n \beta_k \mu(B_k \cap M) \\
&= \int_M f d\mu + \int_M g d\mu.
\end{aligned}$$

(Dabei folgt (*) aus der Implikation $M \subseteq [h = c] \Rightarrow \int_M h d\mu = c\mu(M)$, die für einfache Funktionen direkt aus der Definition des Integrals folgt.)

Aussagen (2) und (4) folgen direkt aus der Definition. Zum Beweis von (3) wendet man (1) auf $g = f + (g - f)$ an und bemerkt, dass $\int_M g - f d\mu \geq 0$ ist. Für (5) benutzt man, dass $f \mathbf{1}_M \leq f \mathbf{1}_N$ falls $M \subseteq N$. \square

Bemerkung 5.11. Aussage (1) aus Lemma 5.10 gilt natürlich per Induktion auch für endliche Summen. Hieraus folgt, dass die Gleichung

$$\int \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{1}_{A_j} = \sum_{j=1}^m \alpha_j \int \mathbf{1}_{A_j} = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j)$$

auch dann gilt, wenn die einfache Funktion im Integranden nicht in kanonischer Darstellung gegeben ist.

Im nächsten Schritt behandeln wir den folgenden wichtigen Approximationssatz.

Satz 5.12. Sei (X, Σ) ein Messraum. Eine Funktion $f: X \rightarrow [0, \infty]$ ist genau dann messbar, wenn es eine monoton steigende Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von einfachen Funktionen $f_n \geq 0$ gibt mit $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ (punktweise).

Beweis. Falls $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ für einfache Funktionen f_n , dann ist f (punktweiser) Grenzwert messbarer Funktionen und daher messbar nach Satz 5.6.

Für die Umkehrung sei nun f messbar. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Partition von $[0, \infty]$ in die $n2^n + 1$ disjunkten Intervalle

$$\left[0, \frac{1}{2^n}\right), \left[\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}\right), \dots, \left[\frac{n2^n-1}{2^n}, \frac{n2^n}{2^n}\right), \quad \text{und} \quad [n, +\infty).$$

Diese induziert eine Partition von X durch messbare Menge

$$X = \left[0 \leq f < \frac{1}{2^n}\right] \cup \dots \cup \left[\frac{n2^n-1}{2^n} \leq f < \frac{n2^n}{2^n}\right] \cup [n \leq f].$$

Nun bilden wir die einfache Funktion

$$f_n := 0 \mathbf{1}_{\left[0 \leq f < \frac{1}{2^n}\right]} + \frac{1}{2^n} \mathbf{1}_{\left[\frac{1}{2^n} \leq f < \frac{2}{2^n}\right]} + \dots + \frac{n2^n-1}{2^n} \mathbf{1}_{\left[\frac{n2^n-1}{2^n} \leq f < \frac{n2^n}{2^n}\right]} + n \mathbf{1}_{[n \leq f]}.$$

Dann gilt $0 \leq f_n \leq f$ auf ganz X und $f < f_n + \frac{1}{2^n}$ auf $[0 \leq f \leq n]$. Man überprüft, dass $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ und es folgt, dass $f = \sup_n f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$. \square

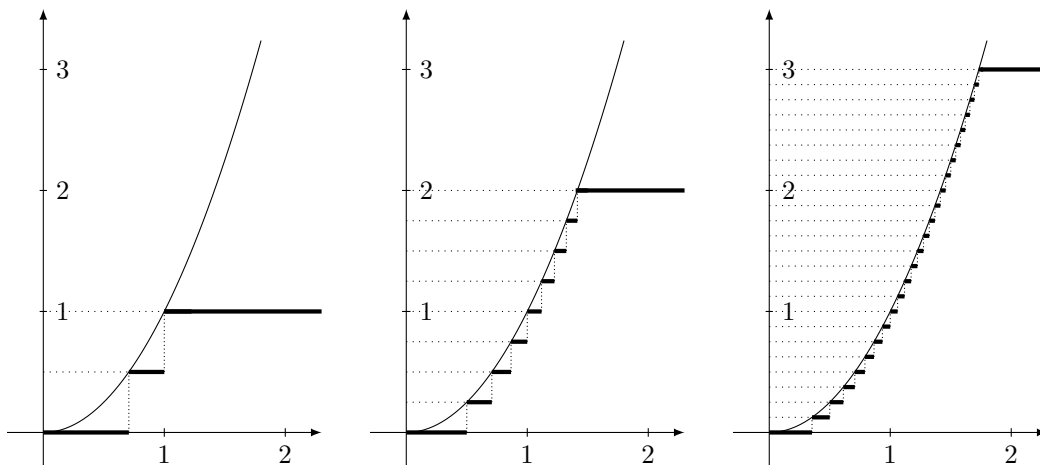


Abbildung 2: Die einfachen Funktionen f_1, f_2 und f_3 aus dem Beweis von Satz 5.12 für $f: [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$, $f(x) = x^2$.

Bemerkung 5.13. Ist f im Satz 5.12 beschränkt, d.h., gibt es $b \in \mathbb{R}$ mit $f(x) \leq b$ für alle $x \in X$, so konvergiert die konstruierte Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sogar *gleichmäßig* auf X gegen f . (In der Tat: Ist $f(x) \leq b < \infty$ für alle $x \in X$, so ist für $n > b$ schon $0 \leq f - f_n \leq \frac{1}{2^n}$ auf ganz X .)

Korollar 5.14. Ist (X, Σ) Messraum und $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar, so existiert eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von einfachen Funktionen mit $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ und $|f_n| \leq |f|$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir betrachten $f = f_+ - f_-$ und wenden Satz 5.12 auf f_+ und f_- an. \square

Ab jetzt nennen wir eine Funktion $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ **positiv**, wenn $f(x) \geq 0$ ist für alle $x \in X$, wenn sie also nirgends einen Wert < 0 annimmt.² Im nächsten Schritt definieren wir das Integral für positive, messbare Funktionen.

²Funktionen, die wir hier *positiv* nennen, werden anderswo oft als *nichtnegativ* (non-negative) bezeichnet. Da man aber bei einer *negativen* Funktion doch wohl an eine Funktion denkt, die nur Werte ≤ 0 oder

Definition 5.15. Sei (X, Σ, μ) Maßraum, $M \in \Sigma$ und $f: X \rightarrow [0, \infty]$ messbar. Dann heißt

$$\int_M f \, d\mu := \sup \left\{ \int_M \bar{f} \, d\mu : \bar{f} \text{ ist einfache Funktion mit } 0 \leq \bar{f} \leq f \right\}$$

das (μ) -Integral von f (über M).

Bemerkung 5.16. Für eine positive, einfache Funktion f stimmt diese Definition mit der aus Definition 5.8 überein. Dies folgt aus Lemma 5.10 (3), und weil man in obigem Supremum auch $\bar{f} = f$ wählen kann.

Für den Beweis von Satz 5.18 benötigen wir die folgende Monotonieeigenschaft des Integrals.

Lemma 5.17. Seien (X, Σ, μ) ein Maßraum, $M \in \Sigma$, und $f, g: X \rightarrow [0, \infty]$ messbare Funktionen mit $f \leq g$. Dann gilt $\int_M f \leq \int_M g$.

Beweis. Für eine positive, messbare Funktion h setzen wir

$$L_h := \{ \bar{h} : \bar{h} \text{ ist einfache Funktion mit } 0 \leq \bar{h} \leq h \}.$$

Dann gilt nach Definition $\int_M h = \sup_{\bar{h} \in L_h} \int_M \bar{h}$.

Aus $f \leq g$ folgt direkt $L_f \subseteq L_g$, und damit

$$\int_M f = \sup_{h \in L_f} \int_M h \leq \sup_{h \in L_g} \int_M h = \int_M g. \quad \square$$

Der folgende Satz ist das Arbeitspferd der Theorie des Lebesgue-Integrals.

Satz 5.18 (Satz von Beppo Levi; Satz von der monotonen Konvergenz). Seien (X, Σ, μ) ein Maßraum, $M \in \Sigma$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton steigende Folge messbarer Funktionen $f_n: X \rightarrow [0, \infty]$ und $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$. Dann ist f messbar und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_M f_n \, d\mu = \int_M f \, d\mu.$$

Beweis. Die Messbarkeit von f folgt aus Satz 5.6. Da $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton steigt, gilt dies nach Lemma 5.17 auch für die Folge $(\int_M f_n \, d\mu)_{n \in \mathbb{N}}$. Damit existiert

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M f_n \, d\mu \in [0, \infty].$$

Wegen der Monotonie ist $f_n \leq f$ und damit $\int_M f_n \, d\mu \leq \int_M f \, d\mu$, also

$$\gamma \leq \int_M f \, d\mu.$$

Für die umgekehrte Ungleichung ist zu zeigen, dass

$$\int_M g \, d\mu \leq \gamma$$

vielleicht sogar nur Werte < 0 hat, wäre eine nicht-negative Funktion im eigentlichen Wortsinne (=eine Funktion die nicht negativ, also keine negative Funktion ist) eine Funktion, die irgendwo auch, aber nicht notwendig überall, positive Werte annimmt. Das ist aber nicht gemeint, wenn von "nichtnegativ" die Rede ist. Zum Beispiel ist die Sinusfunktion auf \mathbb{R} zwar sicher nicht negativ, aber auch nicht "nichtnegativ" im obigen Sinn. Darum wählen wir hier die Terminologie "positiv", wie z.B. in der Funktionalanalysis allgemein üblich. Gilt sogar $f(x) > 0$ für alle $x \in X$, so heißt f **strikt positiv**. Mit dieser Sprechweise ist die konstante Nullfunktion positiv, was Vertreter der "nichtnegativ"-Fraktion natürlich gar nicht mögen.

Wie bei jedem terminologischen Streit hat jede Seite gute Gründe und keiner wirklich Recht. Terminologie ist stets Konvention. Am Besten wäre es natürlich, wenn diese Konvention so gewählt ist, dass sie sich von selbst versteht, aber manchmal geht das eben nicht. Und dann muss man mit einem Kompromiss leben, und immer mal wieder erklären, was man meint.

für jede einfache Funktion g mit $0 \leq g \leq f$. Sei dazu $c \in [0, 1)$. Wir setzen $M_n = M \cap [f_n \geq cg]$ für $n \in \mathbb{N}$. Wegen der Monotonie gilt $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$ und es ist $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ (warum?). Wegen $f_n \mathbf{1}_{M_n} \geq cg \mathbf{1}_{M_n}$ folgt mit Lemma 5.10

$$\gamma \geq \int_M f_n \, d\mu \geq \int_{M_n} f_n \, d\mu \geq \int_{M_n} cg \, d\mu = c \int_{M_n} g \, d\mu.$$

Nach Lemma 5.9 ist aber durch $A \rightarrow \int_A g \, d\mu$, ein Maß gegeben. Nach Satz 2.6(3) gilt damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{M_n} g \, d\mu = \int_M g \, d\mu.$$

Da c mit $0 \leq c < 1$ beliebig war, folgt $\int_M g \, d\mu \leq \gamma$. □

Korollar 5.19. *Seien (X, Σ, μ) ein Maßraum, $M \in \Sigma$, und $f: X \rightarrow [0, \infty]$ eine messbare Funktion. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton steigende Folge einfacher, positiver Funktionen mit $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$. (Solch eine Folge existiert nach Satz 5.12. Dann gilt*

$$\int_M f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_M f_n.$$

Bemerkung 5.20. Bei der Definition des Riemannintegrals wird eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch gewisse einfache Funktionen (Treppenfunktionen) approximiert (Abbildung 3). Dort wird aber mit einer Zerlegung des Definitionsbereichs $[a, b]$ gearbeitet, während in obigem Beweis der Wertebereich $[0, \infty]$ zerlegt und die daraus resultierende Zerlegung des Definitionsbereichs betrachtet wird (Abbildung 4).

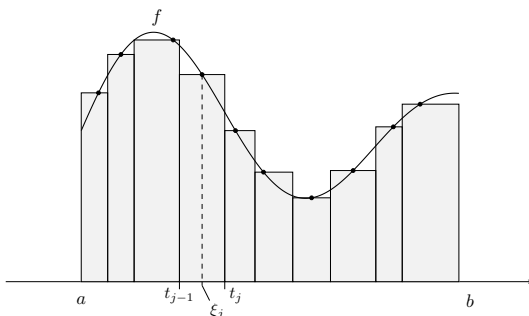


Abbildung 3: Riemann'sche Approximation einer Funktion und ihres Integrals mittels Riemannsummen.

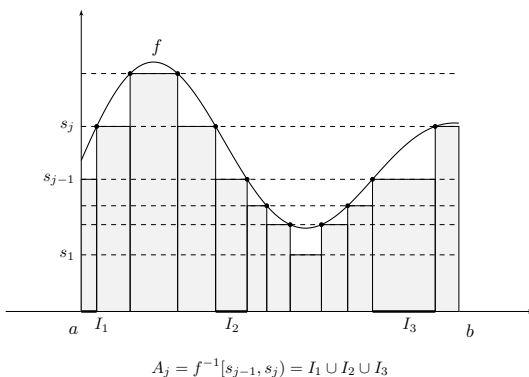


Abbildung 4: Lebesgue'sche Approximation einer Funktion und ihres Integrals.

Die Regeln aus Lemma 5.10 gelten analog, insbesondere:

Lemma 5.21. Seien (X, Σ, μ) Maßraum, $M \in \Sigma$ und $f, g: X \rightarrow [0, \infty]$ messbar. Dann gilt:

- (1) $\int_M (f + g) d\mu = \int_M f d\mu + \int_M g d\mu$.
 (2) Für $\alpha \geq 0$ gilt $\int_M \alpha f d\mu = \alpha \int_M f d\mu$.
 (3) Es gilt $\int_M f d\mu = \int_X \mathbf{1}_M f d\mu$.

Beweis. (1): Nach Satz 5.12 existieren monoton steigende Folgen $(f_n)_n$ und $(g_n)_n$ positiver, einfacher Funktionen mit punktwisem Grenzwert f bzw. g . Dann ist $(f_n + g_n)_n$ eine monoton steigende Folge positiver, einfacher Funktionen mit Grenzwert $f + g$. Mit Korollar 5.19 und Lemma 5.10 (1) folgt:

$$\int_M (f + g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M (f_n + g_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M f_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M g_n = \int_M f + \int_M g.$$

(2) und (3) folgen analog aus Lemma 5.10 (2) bzw. daraus, dass $\int_M h d\mu = \int_X \mathbf{1}_M h d\mu$ für jede einfache Funktion h . \square

Die Aussage in Lemma 5.21 (7) wird oft auch zur Definition von $\int_M f d\mu$ genommen. Für disjunkte Mengen $M, N \in \Sigma$ folgt wegen $\mathbf{1}_{M \cup N} = \mathbf{1}_M + \mathbf{1}_N$, dass

$$\int_{M \cup N} f d\mu = \int_M f d\mu + \int_N f d\mu.$$

Da eine Reihe definitionsgemäß nichts anderes als eine Folge ist, und umgekehrt jede Folge auch als Reihe geschrieben werden kann, hat auch der Satz über monotone Konvergenz ein Analogon für Reihen.

Korollar 5.22. Seien (X, Σ, μ) ein Maßraum und $(g_n)_n$ eine Folge positiver, messbarer Funktionen $g_n: X \rightarrow [0, \infty]$. Dann gilt

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} g_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n d\mu.$$

Zum Beweis muss man nur $f_n = g_1 + \dots + g_n$ setzen.

Der folgende Satz ist auch eine Konsequenz des Satzes über monotone Konvergenz, gilt aber auch für Folgen, die nicht monoton sind.

Satz 5.23 (Lemma von Fatou). Seien (X, Σ, μ) ein Maßraum und $(f_n)_n$ eine Folge positiver, messbarer Funktionen $f_n: X \rightarrow [0, \infty]$. Dann gilt

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $g_n := \inf_{k \geq n} f_k$. Dann ist $(g_n)_n$ eine monoton wachsende Folge positiver, messbarer Funktionen. Nach Definition des Limes inferior ist

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} f_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n.$$

Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz und wegen $g_n \leq f_n$ folgt

$$\begin{aligned} \int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu &= \int \lim_{n \rightarrow \infty} g_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu. \end{aligned} \quad \square$$

Wir gehen nun von positiven, messbaren zu "integrierbaren" Funktionen über.

Definition 5.24. Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum, $M \in \Sigma$. Eine messbare Funktion $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt **integrierbar** (genauer: **μ -integrierbar**) über M , wenn

$$\int_M |f| \, d\mu < \infty.$$

In diesem Fall heißt

$$\int_M f \, d\mu := \int_M f^+ \, d\mu - \int_M f^- \, d\mu$$

das **μ -Integral von f (über M)**.

Ist $\mu = \lambda$ das Lebesgue-Maß, so sprechen wir auch kurz vom **Lebesgue-Integral**.

Bemerkung 5.25. Eine messbare Funktion $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann integrierbar, wenn

$$\int_M f_+ \, d\mu < \infty \quad \text{und} \quad \int_M f_- \, d\mu < \infty.$$

Dies folgt aus der Darstellung $|f| = f_+ + f_-$ (wie?). Ist $f \geq 0$, so gilt $f = f_+$ und $f_- = 0$. Daher stimmt das hier definierte Integral für solche Funktionen mit dem aus Definition 5.15 überein.

Eine Funktion $f = (f_1, \dots, f_d): X \rightarrow \mathbb{R}^d$ heißt **integrierbar** (über M), wenn jede Komponentenfunktion f_j integrierbar (über M) ist. Das **Integral** ist dann

$$\int_M f \, d\mu := \left(\int_M f_1 \, d\mu, \dots, \int_M f_d \, d\mu \right)$$

Für Funktionen $f: X \rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ bedeutet dies: f ist genau dann integrierbar, wenn Real- und Imaginärteil von f es sind. In diesem Fall ist

$$\int_M f \, d\mu = \int_M \operatorname{Re}(f) \, d\mu + i \int_M \operatorname{Im}(f) \, d\mu.$$

Wir werden uns im Folgenden aber auf reellwertige Funktionen beschränken, auch wenn sich viele Resultate auf komplex- bzw. \mathbb{R}^d -wertige Funktionen übertragen lassen.

Das folgende Resultat ist analog zu Lemma 5.21.

Satz 5.26. Seien (X, Σ, μ) ein Maßraum, $\alpha \in \mathbb{R}$, und $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen. Dann gilt:

- (1) $f + g$ ist integrierbar und $\int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$.
- (2) αf ist integrierbar und $\int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$.
- (3) Ist $f \leq g$, so ist $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.
- (4) $|\int f \, d\mu| \leq \int |f| \, d\mu$. (**Dreiecksungleichung für das Integral**)

Beweis. (1): Es gilt

$$(f + g)_+ - (f + g)_- = f + g = f_+ - f_- + g_+ - g_-$$

und folglich

$$(f + g)_+ + f_- + g_- = (f + g)_- + f_+ + g_+.$$

Dies liefert mit Lemma 5.21 (1), dass

$$\int (f + g)_+ + \int f_- + \int g_- = \int (f + g)_- + \int f_+ + \int g_+.$$

Wegen $(f + g)_+ \leq f_+ + g_+$ und $(f + g)_- \leq f_- + g_-$ sind alle Integrale endlich. Hieraus folgt (1).

Die Beweise von (2)-(4) verbleiben als Übung. □

Bemerkung 5.27. Sei $f: X \rightarrow \mathbb{R}^d$ integrierbar. Dann gilt analog zu Satz 5.26 (4):

$$\left\| \int f \, d\mu \right\|_2 \leq \int \|f\|_2 \, d\mu, \quad (5.1)$$

wobei $\|v\|_2$ die euklidische Norm des Vektors $v \in \mathbb{R}^d$ und $\|f\|_2(x) := \|f(x)\|_2$ für $x \in X$ ist. Dies sieht man folgendermaßen. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ das euklidische Skalarprodukt auf \mathbb{R}^d . Dann gilt für alle $v \in \mathbb{R}^d$

$$\left\langle v, \int f \, d\mu \right\rangle_2 = \int \langle v, f \rangle_2 \, d\mu \leq \int |\langle v, f \rangle_2| \, d\mu \leq \int \|v\|_2 \|f\|_2 \, d\mu = \|v\|_2 \int \|f\|_2 \, d\mu.$$

(Linearität und Monotonie des Integrals, Cauchy-Schwarz-Ungleichung). Nun setzt man $v = \int f \, d\mu$ ein und ist fertig.

Zusatz: Unter der Identifikation $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ ist $\|\cdot\|_2 = |\cdot|$ einfach der komplexe Absolutbetrag. Also ergibt sich die Ungleichung

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu$$

für integrierbare Funktionen $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ aus (5.1) als Spezialfall $d = 2$.

Der folgende Satz ist wichtigste der ganzen Theorie.

Satz 5.28 (Satz von Lebesgue; Satz über die majorisierte Konvergenz). *Seien (X, Σ, μ) ein Maßraum und $(f_n)_n$ eine Folge messbarer Funktionen $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$, die (punktweise) gegen eine Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Es existiere eine integrierbare Funktion $F: X \rightarrow [0, \infty]$ mit $|f_n| \leq F$ für alle n . Dann ist f integrierbar und es gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| \, d\mu = 0, \quad \text{und} \quad \int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

Beweis. Die Messbarkeit von f folgt aus Satz 5.6 und die Integrierbarkeit der f_k und die von f folgen aus der Voraussetzung über F .

Wegen $0 \leq |f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2F$ folgt mit dem Lemma von Fatou

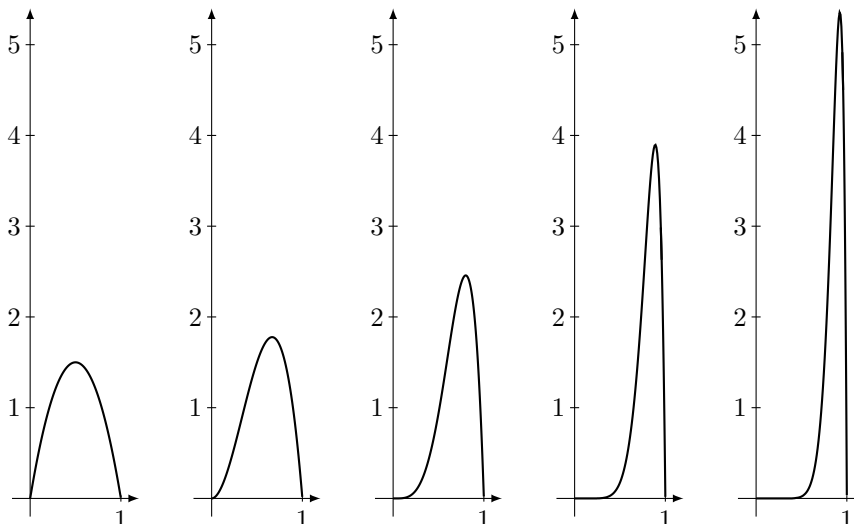
$$\begin{aligned} \int 2F \, d\mu &= \int \lim_{n \rightarrow \infty} (2F - |f_n - f|) \, d\mu \\ &= \int \liminf_{n \rightarrow \infty} (2F - |f_n - f|) \, d\mu \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (2F - |f_n - f|) \, d\mu \\ &= \int 2F \, d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| \, d\mu \end{aligned}$$

und damit die erste Grenzwertaussage. Die zweite folgt aus der ersten mit

$$\left| \int f_n \, d\mu - \int f \, d\mu \right| = \left| \int (f_n - f) \, d\mu \right| \leq \int |f_n - f| \, d\mu. \quad \square$$

Bemerkung 5.29. Ohne die Voraussetzung, dass eine Funktion F wie angegeben existiert, gilt Satz 5.28 nicht. Man betrachte etwa die Funktionen $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch $f_n(x) = (n+1)(n+2)x^n(1-x)$. Benutzen wir bereits das später (Satz 5.33) bewiesene Ergebnis, dass das Lebesgue-Integral über ein kompaktes Intervall mit dem Riemann-Integral übereinstimmt, falls Letzteres existiert, so erhalten wir $\int f_n \, d\lambda = \int_0^1 f_n(x) \, dx = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $f_n(x) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und alle $x \in [0, 1]$; vgl. Abbildung 5.

Definition 5.30. Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum. Wir sagen, eine Aussage Φ über die Elemente x von X gelte **fast überall** (genauer: **μ -fast überall**) auf X oder **für fast alle** $x \in X$, falls es eine Menge $M \in \Sigma$ mit $\mu(M) = 0$ gibt derart, dass Φ für alle $x \in X \setminus M$ gilt.

Abbildung 5: Die Funktionen f_1, f_2, f_4, f_8 und f_{12} .

Anders ausgedrückt: Φ gilt genau dann fast überall auf X , wenn die ‐Ausnahmemenge‐

$$\{x \in X : \Phi \text{ gilt nicht f\u00fcr } x\}$$

eine Nullmenge (im Sinne von Definition 2.11) ist. (Man beachte, dass in dieser Definition die besagte Ausnahmemenge nicht unbedingt selbst messbar sein muss.)

Beispielsweise sagen wir ‐ $f = g$ μ -fast \u00fberall‐, falls die Menge $[f \neq g]$ eine μ -Nullmenge ist.

Satz 5.31. Seien (X, Σ, μ) ein Ma\u00dfraum und $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Dann gilt:

(1) $|f| < \infty$ fast \u00fberall.

(2) Ist $g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar und $g = f$ fast \u00fberall, so ist g integrierbar und $\int g \, d\mu = \int f \, d\mu$.

(3) Es gilt $\int |f| \, d\mu = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ fast \u00fberall.

Beweis. (1): Setze $M := [|f| = \infty]$. F\u00fcr alle $n \in \mathbb{N}$ ist dann $n\mathbf{1}_M \leq |f|$, und daher

$$n\mu(M) = \int n\mathbf{1}_M \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu < \infty.$$

Hieraus folgt $\mu(M) = 0$.

(2): Wir setzen $M := [f \neq g]$. Dann ist M eine messbare Nullmenge, und daher $\mu(M) = 0$. Es gilt $f|_{X \setminus M} = g|_{X \setminus M}$, und daher (mit Lemma 5.21):

$$\begin{aligned} \int g_{\pm} \, d\mu &= \int_{X \setminus M} g_{\pm} \, d\mu + \int_M g_{\pm} \, d\mu = \int_{X \setminus M} g_{\pm} \, d\mu \\ &= \int_{X \setminus M} f_{\pm} \, d\mu = \int_{X \setminus M} f_{\pm} \, d\mu + \int_M f_{\pm} \, d\mu = \int f_{\pm} \, d\mu < \infty. \end{aligned}$$

Also ist g integrierbar und $\int g \, d\mu = \int f \, d\mu$.

(3): Falls $f = 0$ fast \u00fberall, dann $|f| = 0$ fast \u00fberall, und damit $\int |f| = 0$ nach (2). Umgekehrt nehmen wir nun an, dass $\int |f| = 0$. Setze $M_n := [|f| \geq 1/n]$ f\u00fcr $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\frac{1}{n}\mathbf{1}_{M_n} \leq |f|$ und daher

$$\frac{1}{n}\mu(M_n) = \int_{M_n} \frac{1}{n} \, d\mu \leq \int_{M_n} |f| \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu = 0.$$

Also gilt $\mu(M_n) = 0$ und damit auch $\mu[f \neq 0] = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n) = 0$. \square

Bemerkung 5.32. Satz 5.31 impliziert, dass es für die Integrationstheorie meist irrelevant ist, ob wir Funktionen $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ oder $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ betrachten. Im integrierbaren Fall ist $[|f| = \infty]$ eine Nullmenge und Abänderung der Funktion f auf dieser Menge ändert das Integral nicht. Es ist also keine Einschränkung, nur Funktionen nach \mathbb{R} zu betrachten.

So gilt der Satz über majorisierte Konvergenz auch dann, wenn man dort Funktionen $F, f, f_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ zulässt und $f_n \rightarrow f$ und $|f_n| \leq F$ jeweils nur “fast überall” fordert. Denn durch Abänderung der f_n und f auf einer Nullmenge kann man erreichen, dass die Voraussetzungen in der oben angegebenen Fassung gelten. (Hierbei benutzt man, dass abzählbare Vereinigungen von Nullmengen wieder Nullmengen sind.) Eine analoge Bemerkung gilt für viele andere Sätze.

Man kann sogar noch weitergehen: Eigentlich benötigt man zur Integrierbarkeit einer Funktion $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ nicht mal ihre Messbarkeit. Es reicht ihre “wesentliche” Messbarkeit, d.h. dass es eine messbare Funktion $g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ gibt mit $f = g$ fast überall. Wesentliche Messbarkeit ist nämlich einfach nur Messbarkeit bzgl. der Vervollständigung des Maßraums. Da es aber beim Integrieren auf Nullmengen nicht ankommt, sind die Integrationstheorien für ein Maß und für seine Vervollständigung äquivalent. Für die Integrationstheorie macht es keinen Unterschied, ob ein Maßraum vollständig ist oder nicht.

Wir wollen zum Ende dieses Abschnitts das hier eingeführte Lebesgue-Integral und das in Analysis I/II betrachtete Riemann-Integral miteinander vergleichen.

Satz 5.33. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt:*

- (1) *Ist f Riemann-integrierbar, so ist f auch Lebesgue-integrierbar, und Riemann- und Lebesgue-Integral von f über $[a, b]$ stimmen überein.*
- (2) *f ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn f beschränkt ist und die Menge der Unstetigkeitsstellen von f eine Lebesgue-Nullmenge ist.*

Beweis. (1): Sei f Riemann-integrierbar. Dann existieren nach dem *Riemann'schen Integrierbarkeitskriterium* Folgen $(g_n)_n$ und $(h_n)_n$ von Treppenfunktionen³ sodass $g_n \leq f \leq h_n$ und $\int_a^b (h_n(x) - g_n(x)) dx \rightarrow 0$. Ohne Einschränkung kann man $g_n \nearrow$ und $h_n \searrow$ annehmen (warum?).

Offenbar sind Treppenfunktionen einfache Funktionen und Borel-messbar, und Lebesgue- und Riemann-Integral stimmen auf Treppenfunktionen überein. Dann sind also die punktweisen Grenzwerte

$$f_* := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n, \quad \text{und} \quad f^* := \lim_{n \rightarrow \infty} h_n$$

messbar und beschränkt, und daher auch integrierbar. Weiter gilt

$$\int (f^* - f_*) d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (h_n - g_n) d\lambda = \int_a^b (h_n(x) - g_n(x)) dx \rightarrow 0$$

z.B. nach dem Satz von Lebesgue. Es folgt $\int (f^* - f_*) d\lambda = 0$ und daraus $f^* = f_*$ fast überall (mit Satz 5.31 (3)). Wegen $f_* \leq f \leq f^*$ ist dann aber auch $f = f_*$ fast überall. Also ist f Lebesgue-messbar, und es gilt

$$\int f d\lambda = \int f_* d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_* g_n d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

(2): Sei zuerst f Riemann-integrierbar und g_n, h_n, f_*, f^* wie oben. Wie bereits gezeigt ist dann $N := [f_* \neq f^*]$ eine Nullmenge. Sei Z die Menge aller Unstetigkeitsstellen mindestens einer der Funktionen g_n bzw. h_n . Dann ist Z höchstens abzählbar, also ebenfalls eine Nullmenge. Wir zeigen nun, dass f auf $[a, b] \setminus (N \cup Z)$ stetig ist.

Sei dazu $x \in [a, b] \setminus (N \cup Z)$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit

$$f(x) - \varepsilon < g_n(x) \leq h_n(x) < f(x) + \varepsilon.$$

³Eine **Treppenfunktion** ist eine Linearkombination von Funktionen der Form $\mathbf{1}_I$ für Intervalle $I \subseteq [a, b]$.

Da x eine Stetigkeitsstelle von sowohl g_n als auch h_n ist, gibt es eine offene Umgebung U von x sodass

$$f(x) - \varepsilon < g_n(y) \leq f(y) \leq h_n(y) < f(x) + \varepsilon$$

für alle $y \in U$. Also folgt $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ für $y \in U$, und f ist stetig in x .

Für die Umkehrung sei f beschränkt und die Menge der Unstetigkeitsstellen von f eine Nullmenge. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ konstruieren wir Treppenfunktionen g_n und h_n durch fortgesetzte dyadische Unterteilung von $[a, b]$. Genauer: Für $0 \leq j \leq 2^n$ setze $t_{n,j} := a + (b-a)\frac{j}{2^n}$, $I_{n,j} := (t_{n,j-1}, t_{n,j}]$ ($j \geq 1$) sowie $I_{n,0} := \{a\}$, und schließlich

$$\underline{m}_{n,j} := \inf \{f(x) : x \in I_{n,j}\}, \quad \text{und} \quad \overline{m}_{n,j} := \sup \{f(x) : x \in I_{n,j}\}.$$

Dann setze

$$g_n := \sum_{j=0}^{2^n} \underline{m}_{n,j} \mathbf{1}_{I_{n,j}}, \quad \text{und} \quad h_n := \sum_{j=0}^{2^n} \overline{m}_{n,j} \mathbf{1}_{I_{n,j}}.$$

Damit ist $g_n \leq f \leq h_n$ auf ganz $[a, b]$. Sei Z wie oben die Menge aller Unstetigkeitsstellen mindestens einer der Funktionen g_n oder h_n . Dann ist Z abzählbar, und daher eine Nullmenge. Wenn $x \notin Z$ ein Stetigkeitspunkt von f ist, gilt $g_n(x), h_n(x) \rightarrow f(x)$. Nach Voraussetzung ist also $h_n, g_n \rightarrow f$ fast überall. Damit ist $h_n - g_n \rightarrow 0$ fast überall und nach dem Satz von Lebesgue gilt

$$\int_a^b (h_n(x) - g_n(x)) dx = \int (g_n - h_n) d\lambda \rightarrow 0.$$

Es folgt, dass f Riemann-integrierbar ist. \square

Wir benutzen im Folgenden auch für das Lebesgue-Integral die Schreibweise $\int_a^b f(x) dx$ statt $\int_{[a,b]} f d\lambda$.

Beispiel 5.34. Satz 5.33 besagt, dass das Lebesgue-Integral eine Fortsetzung des Riemann-Integrals ist. Dass dabei die Menge der integrierbaren Funktionen tatsächlich echt größer wird, zeigt die **Dirichlet'sche Sprungfunktion** $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

also $f = \mathbf{1}_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}$. Diese Funktion ist bekanntlich nicht Riemann-integrierbar; sie ist aber Lebesgue-integrierbar (mit Integral 0), denn es ist $f = 0$ fast überall.

Aufgabe 1. Sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_+$ derart, dass f über jedes kompakte Teilintervall von (a, b) Riemann-integrierbar ist. Zeigen Sie:

- f ist Lebesgue-messbar.
- f ist genau dann über (a, b) uneigentlich Riemann-integrierbar, wenn f Lebesgue-integrierbar ist, und in diesem Fall stimmen das Lebesgue-Integral und das uneigentliche Riemann-Integral überein.

Nach obiger Aufgabe gilt Satz 5.33 (1), auch für uneigentliche Riemann-Integrale von Funktionen nach $[0, \infty)$. Dies stimmt aber *nicht* mehr für uneigentliche Riemann-Integrale von Funktionen nach \mathbb{R} . Denn eine messbare Funktion f genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn $|f|$ Lebesgue-integrierbar ist. Die entsprechende Aussage für uneigentliche Riemann-Integrierbarkeit ist aber falsch. Ein konkretes Beispiel ist das konvergente (warum?) uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

Im Lebesgueschen Sinne existiert dieses Integral nicht, da sonst auch $|(\sin x)/x|$ Lebesgue-integrierbar über $[1, \infty)$ wäre. Es gilt aber (warum?)

$$\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \infty,$$

sowohl im Riemannschen Sinne wie auch in dem von Definition 5.15.

Ergänzung: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Die folgende Aussage ist eine Verallgemeinerung der Hauptsatzes (bei dem man annehmen muss, dass f' stetig ist).

Satz 5.35. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist f' beschränkt, so ist f' Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx.$$

Beweis. Es gelte $|f'(x)| \leq M$ für alle $x \in [a, b]$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_k(x) = \begin{cases} k(f(x + \frac{1}{k}) - f(x)), & a \leq x \leq b - \frac{1}{k}, \\ 0, & b - \frac{1}{k} < x \leq b. \end{cases}$$

Dann ist f_k integrierbar. Nach dem Mittelwertsatz gilt

$$|f_k(x)| \leq M$$

für alle $x \in [a, b]$. Außerdem gilt

$$f_k(x) \rightarrow f'(x)$$

für alle $x \in [a, b]$.

Nach dem Satz über majorisierte Konvergenz folgt: f' ist integrierbar und

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x) dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^{b - \frac{1}{k}} k(f(x + \frac{1}{k}) - f(x)) dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(k \int_{a + \frac{1}{k}}^b f(x) dx - k \int_a^{b - \frac{1}{k}} f(x) dx \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(k \int_{b - \frac{1}{k}}^b f(x) dx - k \int_a^{a + \frac{1}{k}} f(x) dx \right). \end{aligned}$$

Weil f stetig ist, gilt

$$\left| k \int_a^{a + \frac{1}{k}} f(x) dx - f(a) \right| = \left| k \int_a^{a + \frac{1}{k}} (f(x) - f(a)) dx \right| \leq \max_{a \leq x \leq a + \frac{1}{k}} |f(x) - f(a)|.$$

Daraus folgt

$$k \int_a^{a + \frac{1}{k}} f(x) dx \rightarrow f(a),$$

und analog erhält man $k \int_{b - \frac{1}{k}}^b f(x) dx \rightarrow f(b)$. Insgesamt folgt also

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a). \quad \square$$

Bemerkung 5.36. Satz 5.35 ist eine Verallgemeinerung des “zweiten Teils” des Hauptsatzes. Den “ersten Teil” betreffend hat man Folgendes:

(a) Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar, so ist die Funktion

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt \quad (x \in [a, b]) \quad (5.2)$$

fast überall differenzierbar und es ist $F' = f$ fast überall.

(b) Genau dann kann man eine Funktion F in der Form (5.2) schreiben für eine integrierbare Funktion f , wenn F absolutstetig und $F(a) = 0$ ist.

Hierbei heißt eine Funktion $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **absolut stetig** falls es für jedes $\varepsilon > 0$ eine $\delta > 0$ gibt, so dass für jede endliche Menge $[a_j, b_j]$, $j \in \{1, \dots, n\}$, von paarweise disjunkten Teilintervallen von $[a, b]$ mit Gesamtlänge $\sum_{j=1}^n (b_j - a_j) < \delta$ schon

$$\sum_{j=1}^n |h(b_j) - h(a_j)| < \varepsilon$$

gilt.

Absolutstetigkeit ist eine Verschärfung von Stetigkeit. Weiterführende Literatur dazu ist z.B. [Walter, Analysis II (5. Aufl.), 9.23]. Eine gute moderne Referenz ist [Stein/Shakarchi, Real Analysis].

6 Parameterabhängige Integrale

Sei X ein metrischer Raum, (Y, Σ, μ) ein Maßraum und $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass für jedes $x \in X$ die durch $y \mapsto f(x, y)$ definierte Funktion integrierbar ist. Dann kann eine Funktion $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F(x) := \int_Y f(x, y) d\mu(y)$$

definiert werden. (Wir schreiben $d\mu(y)$, um zu verdeutlichen, dass die Integration bezüglich des Maßes μ sich auf die Variable y bezieht.) Wir wollen untersuchen, inwieweit sich die Stetigkeit oder Differenzierbarkeit von f auf F überträgt.

Im Allgemeinen folgt aus der Stetigkeit von f nicht die von F :

Beispiel 6.1. Es seien $X = Y = \mathbb{R}$ und $f(x, y) = x \exp(-(xy)^2)$. Für $x > 0$ gilt dann

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \exp(-(xy)^2) dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Für $x < 0$ ist $F(x) = -\sqrt{\pi}$, also ist F unstetig in $x = 0$.

Es gilt aber folgendes Resultat.

Satz 6.2. *Seien $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ und $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ wie oben. Zusätzlich gelte:*

- (i) *Für alle $y \in Y$ ist $x \mapsto f(x, y)$ stetig.*
- (ii) *Es existiert eine integrierbare Funktion $\Phi: Y \rightarrow [0, \infty]$ so dass $|f(x, y)| \leq \Phi(y)$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$.*

Dann ist F stetig.

Beweis. Wir müssen zeigen: aus $x_n \rightarrow x$ folgt $F(x_n) \rightarrow F(x)$.

Sei also $(x_n)_n$ eine Folge in X mit $x_n \rightarrow x \in X$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $f_n: Y \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f_n(y) := f(x_n, y)$. Da die f_n integrierbar sind und $|f_n| \leq \Phi$ für alle n ist, folgt aus dem Satz über majorisierte Konvergenz

$$F(x_n) = \int_Y f(x_n, y) d\mu(y) = \int_Y f_n d\mu \rightarrow \int_Y f(x, \cdot) d\mu = \int_Y f(x, y) d\mu = F(x). \quad \square$$

Aufgabe. Betrachten Sie das obige Beispiel im Licht von Satz 6.2. Welche Bedingung muss verletzt sein? Wie kann man das direkt sehen?

Als nächstes behandeln wir die Differenzierbarkeit von parameterabhängigen Integralen.

Satz 6.3. *Seien $X \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ sowie $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ wie vorher. Es gelte:*

- (i) *Für alle $y \in Y$ ist $x \mapsto f(x, y)$ (stetig) partiell differenzierbar.*

(ii) Für jedes $j \in \{1, \dots, d\}$ existiert eine integrierbare Funktion $\Phi_j: Y \rightarrow [0, \infty)$, so dass

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) \right| \leq \Phi_j(y)$$

für alle $x \in X, y \in Y$.

Dann ist F (stetig) differenzierbar. Außerdem ist die durch

$$y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y)$$

gegebene Funktion von Y nach \mathbb{R} für alle $x \in X$ und alle $j \in \{1, \dots, d\}$ integrierbar und es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \int_Y \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) d\mu(y).$$

Beweis. Wir bezeichnen mit $e_j \in \mathbb{R}^d$ den j -ten Einheitsvektor. Sei $x \in X$, und sei $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $g_n: Y \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g_n(y) := \frac{f(x + h_n e_j, y) - f(x, y)}{h_n}.$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es $t \in (0, h_n)$ mit

$$|g_n(y)| = \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + t e_j, y) \right| \leq \Phi_j(y).$$

Es gilt also $|g_n| \leq \Phi_j$. Weiter gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(y) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y)$$

für alle $y \in Y$.

Damit können wir den Satz über majorisierte Konvergenz auf die Folge $(g_n)_n$ anwenden. Es folgt, dass $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y)$ integrierbar ist und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_Y g_n(y) d\mu(y) = \int_Y \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) d\mu(y).$$

Andererseits gilt

$$\int_Y g_n(y) d\mu(y) = \frac{F(x + h_n e_j) - F(x)}{h_n}.$$

Es folgt die partielle Differenzierbarkeit von F und die Formel für $\frac{\partial F}{\partial x_j}$. Die Stetigkeit von $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ (bei Stetigkeit von $\frac{\partial f}{\partial x_j}$) folgt dann aus Satz 6.2. \square

Beispiel 6.4. Sei $F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$F(x) = \int_0^1 \frac{y^x - 1}{\log y} dy.$$

Das Integral existiert, da $e^t \geq 1 + t$ für $t \in \mathbb{R}$ und damit

$$0 \leq \frac{y^x - 1}{\log y} = \frac{1 - y^x}{-\log y} = \frac{1 - e^{x \log y}}{-\log y} \leq \frac{-x \log y}{-\log y} = x$$

für $0 < y < 1$. Wegen

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{y^x - 1}{\log y} = y^x \leq 1$$

folgt aus Satz 6.3, dass F differenzierbar ist, mit

$$F'(x) = \int_0^1 y^x dy = \frac{1}{1+x}.$$

Obige Abschätzung des Integranden liefert auch $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 0$ und damit

$$F(x) = \int_0^x F'(t) dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \log(1+x).$$

Aufgabe 2. Die Funktion $\log(1+x)$ ist auch für $-1 < x \leq 0$ definiert. Das deutet darauf hin, dass die Einschränkung auf $x > 0$ bei der Definition der Funktion F nicht optimal ist und alles auch für $x > -1$ gehen sollte. Stimmt das? (Begründung!)

Bemerkung 6.5. Die Sätze dieses Kapitels über parameterabhängige Integrale wurden mithilfe des Satzes von der majorisierten Konvergenz bewiesen. Hat man eine elementarere Situation gegeben, so kann man solche Sätze auch elementarer beweisen. Ist beispielsweise $f: [c, d] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann benötigt man kein Lebesgue-Integral, sondern nur das Riemann-Integral für stetige Funktionen. Für diese Situation kann man ganz ohne Lebesgue-Theorie und nur mit Mitteln der elementaren Analysis relevante Sätze über parameterabhängige Integrale zeigen, die schon ausreichen, um etwa die uneigentlichen Integrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

zu berechnen.

7 L^p -Räume

Sei (X, Σ, μ) Maßraum. Für eine messbare Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ setzen wir

$$\|f\|_1 := \int |f| d\mu.$$

Damit ist f genau dann integrierbar, wenn $\|f\|_1 < \infty$ ist. Sei

$$\mathcal{L}^1(\mu) := \mathcal{L}^1(X, \Sigma, \mu) := \{f: X \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ integrierbar}\}.$$

Nach Satz 5.26 ist $\mathcal{L}^1(\mu)$ ein Vektorraum und für $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ folgt

$$\|\alpha f\|_1 = |\alpha| \cdot \|f\|_1 \quad \text{und} \quad \|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

Die Abbildung $\|\cdot\|_1: \mathcal{L}^1(\mu) \rightarrow [0, \infty)$ ist aber im Allgemeinen nur eine **Halbnorm** und keine Norm, denn aus $\|f\|_1 = 0$ folgt nicht $f = 0$ sondern nur $f = 0$ fast überall (Satz 5.31).

Aus den Halbnormeigenschaften folgt leicht, dass die Menge

$$\mathcal{N} := \{f \in \mathcal{L}^1(\mu) : \|f\|_1 = 0\} = \{f \in \mathcal{L}^1(\mu) : f(x) = 0 \text{ fast überall}\}$$

ein Unterraum von $\mathcal{L}^1(\mu)$ ist. Wie aus der (Linearen) Algebra bekannt, ist dann durch

$$f \sim g \stackrel{\text{def.}}{\iff} f - g \in \mathcal{N} \iff f = g \text{ fast überall}$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{L}^1(\mu)$ gegeben. Der zugehörige *Quotientenraum* wird mit

$$L^1(\mu) := \mathcal{L}^1(\mu)/\mathcal{N}$$

bezeichnet. Beim Übergang von $\mathcal{L}^1(\mu)$ zu $L^1(\mu)$ werden also einfach Funktionen miteinander identifiziert, die μ -fast überall übereinstimmen.

Wie ebenfalls aus der (linearen) Algebra bekannt, ist $L^1(\mu)$ auf kanonischer Weise ein Vektorraum derart, dass die Abbildung

$$\mathcal{L}^1(\mu) \rightarrow L^1(\mu), \quad f \mapsto [f]$$

linear ist. (Hier bezeichnet $[f] \in L^1(\mu)$ die Äquivalenzklasse von $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.)

Genauso wie die Vektorraumoperationen kann man auch die Normabbildung $\|\cdot\|_1$ auf $L^1(\mu)$ "induzieren". Dazu stellen wir fest, dass gilt (warum?)

$$[f] = [g] \quad \Leftrightarrow \quad \|f - g\|_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \|f\|_1 = \|g\|_1.$$

Man kann also $\|[f]\|_1 := \|f\|$ für $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ definieren und erhält so eine Norm (prüfen Sie das nach!) auf $L^1(\mu)$.

Damit erhalten wir folgendes Ergebnis.

Satz 7.1. $(L^1(\mu), \|\cdot\|_1)$ ist ein normierter Raum.

Es ist allgemein üblich, die Äquivalenzklasse von f nicht mit $[f]$, sondern wieder mit f zu bezeichnen.

Beispiel 7.2. Sei $X = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, und μ das Zählmaß. Man schreibt ℓ^1 für $L^1(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$.

Wir identifizieren Funktionen $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. (Hierbei korrespondiert f zu $(f(n))_n$.) Eine Folge $x = (x_n)_n$ gehört genau dann zu $\mathcal{L}^1(\mu)$ wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$. Es gilt $\|x\|_1 = 0$ genau dann wenn $x = 0$, d.h., $\|\cdot\|_1$ ist bereits eine Norm, und $\mathcal{N} = \{0\}$, und es gilt $\mathcal{L}^1(\mu) = L^1(\mu)$. Es folgt

$$\ell^1 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}.$$

Beispiel 7.3. Sei $X = [0, 1]$, $\Sigma = \mathcal{B}([0, 1])$, und λ das Lebesgue-Maß auf $[0, 1]$. Man schreibt L^1 für $L^1([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$. In diesem Fall gilt $\mathcal{N} \neq \{0\}$, und L^1 ist ein echter Quotient von $\text{cal}L^1([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$.

Für eine messbare Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ betrachtet man neben $\|\cdot\|_1$ für $p \in (1, \infty)$ allgemeiner auch:

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} = (\| |f|^p \|_1)^{1/p}.$$

Genau wie im Fall $p = 1$ gilt: $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$ fast überall.

Von den weiteren Eigenschaften einer Norm ist $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ klar, die Dreiecksungleichung aber zunächst nicht. Dazu zeigen wir folgendes Lemma:

Lemma 7.4. Seien $a, b \in [0, \infty)$ und $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$ab = \inf_{t > 0} \left(\frac{t^p}{p} a^p + \frac{t^{-q}}{q} b^q \right).$$

Beweis. Wir können $a, b > 0$ annehmen, da sonst die Behauptung trivial ist. Sei $x = \log a$ und $y = \log b$. Mit der Konvexität der Exponentialfunktion folgt

$$ab = e^x \cdot e^y = e^{x+y} = \exp\left(\frac{1}{p} px + \frac{1}{q} qy\right) \leq \frac{1}{p} \exp(px) + \frac{1}{q} \exp(qy) = \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q.$$

Für $t > 0$ ersetzt man nun a durch ta und b durch $t^{-1}b$ und erhält

$$ab = (ta)(t^{-1}b) \leq \frac{t^p}{p} a^p + \frac{t^{-q}}{q} b^q \quad (t > 0).$$

Für $t = a^{-\frac{1}{q}} b^{\frac{1}{p}}$ hat man hier Gleichheit (nachrechnen!). □

Die Beziehung zwischen p und q in Lemma 7.4 taucht an vielen Stellen auf und wir definieren daher:

Definition 7.5. Zwei Zahlen $p, q \in (1, \infty)$ heißen **zueinander konjugiert**, falls $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wir sagen dann auch, dass p und q konjugierte Hölder Exponenten sind.

Aus dem Lemma erhalten wir eine der wichtigsten Ungleichungen der Analysis.

Satz 7.6 (Höldersche Ungleichung). Seien $f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar, sowie $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q. \quad (7.1)$$

Beweis. Falls $\|f\|_p = 0$, so folgt $f = 0$ fast überall, und damit auch $fg = 0$ fast überall, und folglich $\|fg\|_1 = 0$. Analog folgt aus $\|g\|_q = 0$ auch schon $\|fg\|_1 = 0$. In diesen Fällen gilt also (7.1), und wir können nun annehmen, dass $\|f\|_p > 0$ und $\|g\|_q > 0$.

Falls $\|f\|_p = \infty$ oder $\|g\|_q = \infty$, dann ist (7.1) offenbar erfüllt. Wir können also annehmen, dass $0 < \|f\|_p < \infty$ und $0 < \|g\|_q < \infty$. Nach Satz 5.31 können wir nun ohne Einschränkung annehmen, dass f und g Werte in \mathbb{R} annehmen.

Nach Lemma 7.4 gilt für jedes $t > 0$

$$|fg| = |f| |g| \leq \frac{t^p}{p} |f|^p + \frac{t^{-q}}{q} |g|^q.$$

Integrieren ergibt

$$\|fg\|_1 \leq \frac{t^p}{p} \|f\|_p^p + \frac{t^{-q}}{q} \|g\|_q^q.$$

Infimum über $t > 0$ nehmen liefert dann (7.1), wieder wegen Lemma 7.4. \square

Die gewünschte Dreiecksungleichung liefert nun folgender Satz.

Satz 7.7. (Minkowskische Ungleichung) Seien $f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar und $p \in [1, \infty)$. Dann gilt

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Beweis. Den Fall $p = 1$ haben wir bereits gesehen. Sei also $p > 1$, und sei $q > 1$ der zu p konjugierte Exponent (d.h. es gilt $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Dann ist

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \| |f + g|^p \|_1 \\ &\leq \| |f| \cdot |f + g|^{p-1} + |g| \cdot |f + g|^{p-1} \|_1 \\ &\leq \| |f| \cdot |f + g|^{p-1} \|_1 + \| |g| \cdot |f + g|^{p-1} \|_1 \\ &\leq \|f\|_p \| |f + g|^{p-1} \|_q + \|g\|_p \| |f + g|^{p-1} \|_q \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \| |f + g|^{p-1} \|_q. \end{aligned}$$

Weiter folgt wegen $(p-1)q = p$ und damit $1/q = (p-1)/p$, dass

$$\| |f + g|^{p-1} \|_q = \left(\| |f + g|^{(p-1)q} \|_1 \right)^{\frac{1}{q}} = \| |f + g|^p \|_1^{\frac{p-1}{p}} = \|f + g\|_p^{p-1}.$$

Die Behauptung folgt. \square

Sei nun $\mathcal{L}^p(\mu)$ die Menge aller messbaren Funktionen $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, für die $\|f\|_p < \infty$ gilt. Dann ist $\mathcal{L}^p(\mu)$ ein Vektorraum. Wie oben setzt man

$$L^p(\mu) = \mathcal{L}^p(\mu) / \{f \in \mathcal{L}^p(\mu) : \|f\|_p = 0\}.$$

Wie im Fall $p = 1$ wird wieder nur f statt $[f]$ (der Äquivalenzklasse von $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$) geschrieben.

Analog zu Satz 7.1 gilt – mit der offensichtlichen Definition der Norm $\|\cdot\|_p$ auf $L^p(\mu)$ – folgender Satz.

Satz 7.8. $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ ist normierter Raum.

Beispiel 7.9. Die durch $x \mapsto 1/x^\alpha$ gegebene Funktion ist genau dann in $L^p((1, \infty))$ bezüglich λ , falls

$$\int_{(1, \infty)} \left| \frac{1}{(x^\alpha)^p} \right| d\lambda(x) = \int_1^\infty \frac{dx}{x^{\alpha p}} < \infty.$$

Dies ist der Fall, wenn $\alpha p > 1$, also $p > 1/\alpha$.

Analog ist diese Funktion genau dann in $L^p((0, 1))$, wenn $p < 1/\alpha$ ist.

Wir beweisen als nächstes, dass die normierten Räume $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ für jedes $p \in [1, \infty]$ vollständig sind.

Wir zeigen dazu ein allgemeineres Resultat. Dabei heißt eine Folge $(f_n)_n$ von Funktionen von X nach \mathbb{R} eine **L^p -Cauchyfolge**, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\|f_m - f_n\|_p < \varepsilon$ für $m, n \geq N$.

Satz 7.10 (Satz von Riesz-Fischer). *Sei $(f_n)_n$ eine L^p -Cauchyfolge in $\mathcal{L}^p(\mu)$. Dann existiert $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ mit*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Außerdem existiert eine Teilfolge $(f_{n_j})_j$ von $(f_n)_n$ und eine Funktion $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ mit $f_{n_j} \rightarrow g$ fast überall und $|f_{n_j}| \leq g$ fast überall für alle j .

Bemerkung 7.11. Im Allgemeinen gilt nicht $f_n \rightarrow f$ fast überall. Ein Gegenbeispiel erhält man wie folgt: Für $k \in \mathbb{N}$ sei $n \in \mathbb{N}_0$ mit $2^n \leq k \leq 2^{n+1} - 1$. Weiter sei

$$I_k = \left[\frac{k}{2^n} - 1, \frac{k+1}{2^n} - 1 \right]$$

und $f_k: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_k = \mathbf{1}_{I_k}$. Es ist also f_k die charakteristische Funktion eines Teilintervalls von $[0, 1]$ der Länge $1/2^n$.

Es gilt $\|f_k\|_1 = 1/2^n \rightarrow 0$, also $\|f_k - f\|_1 \rightarrow 0$ für $f = 0$, aber für $x \in [0, 1]$ und $n \in \mathbb{N}_0$ existiert k mit $2^n \leq k \leq 2^{n+1} - 1$ und $f_k(x) = 1$. Also existiert kein $x \in [0, 1]$ mit $f_k(x) \rightarrow f(x) = 0$.

Beweis von Satz 7.10. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall $p = 1$. Sei $(n_j)_j$ wachsende Folge mit

$$\|f_n - f_{n_j}\|_1 < \frac{1}{2^j} \quad \text{für } n \geq n_j.$$

Wir zeigen zunächst, dass $(f_{n_j})_j$ fast überall konvergiert.

Sei dazu $g_j = f_{n_{j+1}} - f_{n_j}$. Dann gilt $\|g_j\|_1 < 2^{-j}$ und mit Korollar 5.22 folgt

$$\int \left(\sum_{j=1}^{\infty} |g_j| \right) d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int |g_j| d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \|g_j\|_1 < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1.$$

Sei $h: X \rightarrow [0, \infty]$,

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)| = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x)|.$$

Dann ist h messbar und $\|h\|_1 = \int h d\mu \leq 1$. Nach Satz 5.31 ist dann $N := [h = \infty]$ eine Nullmenge.

Wir definieren nun

$$f(x) = \begin{cases} f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} (f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)), & x \notin N, \\ 0, & x \in N. \end{cases}$$

Für $x \notin N$ gilt also

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f_{k_1}(x) + \sum_{j=1}^{n-1} (f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x)) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{k_n}(x).$$

Weiter ist $|f_{n_j}| \leq |f_{n_1}| + h =: g$ auf N^c , und damit fast überall. Nach dem Satz über majorisierte Konvergenz ist daher f integrierbar und es gilt $\|f - f_{n_j}\|_1 \rightarrow 0$. Weil $(f_n)_n$ eine L^1 -Cauchyfolge ist, folgt daraus $\|f - f_n\|_1 \rightarrow 0$ (wie?) \square

Satz 7.12. *Für jedes $p \in [1, \infty)$ ist $L^p(\mu)$ vollständig.*

Beweis. Sei $([f_k])_k$ eine Cauchyfolge in $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$. Dann ist $(f_k)_k$ eine L^p -Cauchyfolge, und wir können den Satz von Riesz-Fischer anwenden. Ist f wie in diesem Satz gewählt, so ist $[f]$ Grenzwert von $([f_k])_k$ in $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$. Also konvergiert jede Cauchyfolge in $L^p(\mu)$, was zu zeigen war. \square

Für $p = \infty$ geht man wie folgt vor: Eine Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **wesentlich beschränkt**, falls $M \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $\{x \in X: |f(x)| > M\}$ Nullmenge ist. Solch ein M heißt **wesentliche Schranke** für f . Das **wesentliche Supremum** von f ist definiert als

$$\|f\|_{L^\infty} := \inf\{M : M \text{ ist wesentliche Schranke von } f\}.$$

mit der üblichen Konvention $\infty = \inf \emptyset$, d.h. es gilt $\|f\|_{L^\infty} = \infty$ falls f nicht wesentlich beschränkt ist. Es gilt wieder $\|f\|_{L^\infty} = 0$ genau dann wenn $f = 0$ fast überall.

Lemma 7.13. *Sei f wesentlich beschränkt und $M := \|f\|_{L^\infty}$. Dann ist M wesentliche Schranke von f . (D.h. das Infimum in der Definition von $\|f\|_{L^\infty}$ wird angenommen.)*

Beweis. Übung. \square

Bemerkung 7.14. Man kann den Begriff der konjugierten Hölder Exponenten erweitern und sagen, dass 1 und ∞ zueinander konjugiert sind. Die Höldersche und Minkowskische Ungleichungen gelten dann auch in diesem Fall:

Seien $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Dann gilt

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_{L^\infty} \|g\|_1$$

und

$$\|f + g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty}.$$

(Übung.)

Mit $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ bezeichnet man den Vektorraum der wesentlich beschränkten messbaren Funktionen $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Wie oben erhält man hieraus einen normierten Raum

$$L^\infty(\mu) = \mathcal{L}^\infty(\mu) / \{f \in \mathcal{L}^\infty(\mu) : \|f\|_{L^\infty} = 0\}.$$

Satz 7.12 gilt dann auch für $p = \infty$: Der normierte Raum $L^\infty(\mu)$ ist vollständig. (Übung.)

Bemerkung 7.15. Für die auf \mathcal{L}^∞ definierte Halbnorm $\|\cdot\|_{L^\infty}$ wird oft auch einfach nur $\|\cdot\|_\infty$ geschrieben. Das ist mit Vorsicht zu genießen, weil dieses Symbol auch für die *Supremumsnorm* $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ verwendet wird.

Offenbar ist jede beschränkte Funktion auch wesentlich beschränkt und es gilt $\|f\|_{L^\infty} \leq \|f\|_\infty$. Im Allgemeinen kann hier $<$ stehen: Für die Dirichlet'sche Sprungfunktion $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ gilt $\|f\|_\infty = 1$, aber $\|f\|_{L^\infty} = 0$, da $\{|f| > 0\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ eine Nullmenge ist.

Ist aber etwa $X \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gilt $\|f\|_\infty = \|f\|_{L^\infty}$ (warum?).

8 Integration auf Produkträumen

Bislang haben wir sehr viel Theorie entwickelt. Wie aber berechnet man nun effektiv das Volumen eines Körpers bzw. das Integral einer Funktion über eine Kugel? Darum soll es in diesem und im nächsten Abschnitt gehen.

Schon in der Schule haben wir gelernt, die "Fläche unterhalb des Graphen" einer stetigen Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ als $\int_a^b f(x) dx$ zu berechnen. Dabei wurde aber noch kein maßtheoretischer Flächenbegriff zugrundegelegt. Um diese Praxis zu rechtfertigen, müssen wir also noch die Implikation

$$A = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\} \quad \Rightarrow \quad \lambda^2(A) = \int_a^b f(x) dx \quad (8.1)$$

beweisen. Dazu bemerken wir, dass in diesem Beispiel für jedes $x \in [a, b]$ der Wert $f(x)$ gerade die Länge (= das eindimensionale Maß) des " x -Schnittes" $A_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in$

$A\} = [0, f(x)]$ ist. Man berechnet hier also ein zweidimensionales Maß dadurch, dass man für jedes x das Maß $\lambda^1(A_x)$ des x -Schnittes A_x bestimmt und dann nach x integriert. Dies ist eine Version des sogenannten “Cavalieri’schen Prinzips”.

Um (8.1) bzw. die Gültigkeit des Cavalieri’schen Prinzips zu zeigen, gehen wir indirekt vor: wir zeigen erst, wie mithilfe des Cavalieri’schen Prinzips aus zwei Ausgangsmaßen ein “Produktmaß” konstruiert werden kann; und dann, dass dieses Produktmaß im Falle zweier Lebesgue-Maße wieder das Lebesguemaß ist.

Um das Produkt zweier Maße zu definieren, muss zuerst die entsprechende σ -Algebra eingeführt werden.

Definition 8.1. Seien (X, Σ) und (Y, Σ') zwei Messräume und sei

$$\mathcal{E} := \mathcal{E}(\Sigma, \Sigma') := \{B \times B' : B \in \Sigma, B' \in \Sigma'\}.$$

Dann heißt $\Sigma \otimes \Sigma' := \sigma(\mathcal{E})$ die **Produkt- σ -Algebra** von Σ und Σ' . Messbarkeit bezüglich $\Sigma \otimes \Sigma'$ wird auch als **Produkt-Messbarkeit** bezeichnet.

Lemma 8.2. Seien (X, Σ) , (Y, Σ') und (Z, Σ'') Messräume. Eine Funktion $f: Z \rightarrow X \times Y$, $f = (f_1, f_2)$, ist genau dann produkt-messbar, wenn die Funktionen $f_1: Z \rightarrow X$ und $f_2: Z \rightarrow Y$ messbar sind.

Beweis. Für $B \in \Sigma$ und $B' \in \Sigma'$ gilt

$$f^{-1}(B \times B') = f_1^{-1}(B) \cap f_2^{-1}(B').$$

Sind f_1 und f_2 messbar, so folgt $f^{-1}(B \times B') \in \Sigma''$ und daraus mit Satz 4.6, dass f produkt-messbar ist. Ist umgekehrt f produkt-messbar, so sind

$$f_1^{-1}(B) = f^{-1}(B \times Y) \quad \text{und} \quad f_2^{-1}(B') = f^{-1}(X \times B')$$

messbare Mengen, also f_1, f_2 messbare Funktionen. □

Insbesondere sind die kanonischen Projektionen $\pi_1: X \times Y \rightarrow X$ und $\pi_2: X \times Y \rightarrow Y$ beide produkt-messbar, denn mit $Z = X \times Y$ ist $(\pi_1, \pi_2) = \text{id}_Z$ ja messbar.

Beispiel 8.3. Seien $r, s \in \mathbb{N}$ und $d := r + s$. Dann kann man $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$ mit \mathbb{R}^d identifizieren. In diesem Sinne gilt dann

$$\mathcal{B}^r \otimes \mathcal{B}^s = \mathcal{B}^d.$$

Begründung: Da die Projektionen $\pi_1: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^r$ und $\pi_2: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^s$ stetig, also Borel-messbar sind (Satz 4.7), folgt

$$B \times B' = \pi_1^{-1}(B) \cap \pi_2^{-1}(B') \in \mathcal{B}^d$$

für alle $B \in \mathcal{B}^r$ und $B' \in \mathcal{B}^s$. Daraus folgt $\mathcal{B}^r \otimes \mathcal{B}^s \subseteq \mathcal{B}^d$.

Andererseits gilt offensichtlich $\mathcal{Q}^d \subseteq \mathcal{B}^r \otimes \mathcal{B}^s$ und damit auch $\mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{Q}^d) \subseteq \mathcal{B}^r \otimes \mathcal{B}^s$.

Nachdem nun geklärt ist, welche Mengen “produkt-messbar” sind, zeigen wir, dass das Vorgehen beim Cavalieri’schen Prinzip — also “Schnitte” bilden und messen und schließlich wieder integrieren — sinnvoll ist.

Sei dazu $A \subseteq X \times Y$ und $f: X \times Y \rightarrow Z$, wobei Z irgendeine Menge ist. Für $x \in X$ setzen wir

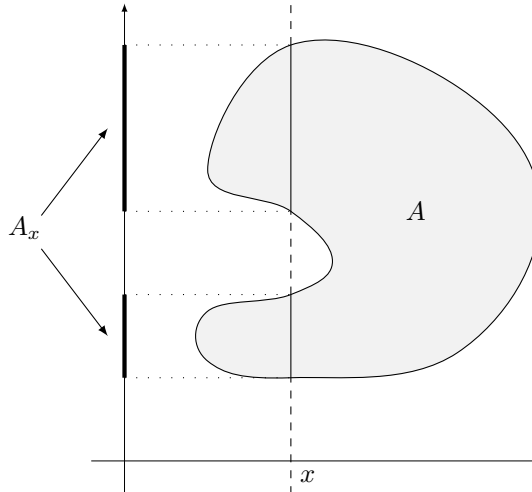
$$A_x := \{y \in Y : (x, y) \in A\} \quad \text{und} \quad f_x: Y \rightarrow Z, \quad f_x(y) = f(x, y),$$

siehe Abbildung 6. Analog setzt man für $y \in Y$

$$A^y := \{x \in X : (x, y) \in A\} \quad \text{und} \quad f^y: X \rightarrow Z, \quad f^y(x) = f(x, y).$$

Die Menge A_x bzw. die Funktion f_x heißt der **x -Schnitt** von A bzw. von f . (Analoge Terminologie im anderen Fall.)

Aufgabe. Zwischen Schnitten von Mengen und Funktionen besteht der folgende Zusammenhang: $(\mathbf{1}_A)_x = \mathbf{1}_{A_x}$ und $(\text{graph } f)_x = \text{graph } f_x$.

Abbildung 6: A_x ist die Projektion eines Schnitts von A auf Y .

Lemma 8.4. Seien (X, Σ) , (Y, Σ') und (Z, Σ'') Messräume und $(x, y) \in X \times Y$.

(1) Ist $A \in \Sigma \otimes \Sigma'$, so gilt $A_x \in \Sigma'$ und $A^y \in \Sigma$.

(2) Ist $f: X \times Y \rightarrow Z$ messbar, so sind auch f_x und f^y messbar.

Beweis. Aus Symmetriegründen reicht es, nur x -Schnitte zu betrachten. Für festes $x \in X$ setzen wir

$$\varphi: Y \rightarrow X \times Y, \quad \varphi(y) := (x, y).$$

Die Komponentenfunktionen von φ sind $(y \mapsto x)$ (konstant) und $(y \mapsto y)$ (identische Abbildung), also beide messbar. Daher ist φ (produkt-)messbar und darum sind auch $A_x = \varphi^{-1}(A)$ und $f_x = f \circ \varphi$ messbar. \square

Das nächste Lemma liefert noch die Messbarkeit der Abbildung $x \mapsto \mu'(A_x)$. Hierzu benötigen wieder einmal mehr den Satz 1.15 über Dynkin-Systeme.

Lemma 8.5. Seien (X, Σ, μ) und (Y, Σ', μ') σ -endliche Maßräume. Dann sind für jedes $A \in \Sigma \otimes \Sigma'$ die Funktionen

$$\mu'_A: X \rightarrow [0, \infty], \quad x \mapsto \mu'(A_x), \quad \text{und} \quad \mu_A: Y \rightarrow [0, \infty], \quad y \mapsto \mu(A^y)$$

messbar.

Beweis. Aus Symmetriegründen reicht es, μ'_A zu betrachten. Zunächst nehmen wir an, dass μ' sogar endlich ist. Sei

$$\mathcal{D} := \{A \in \Sigma \otimes \Sigma' : x \mapsto \mu'_A(x) = \mu'(A_x) \text{ ist messbar}\}.$$

Zu zeigen ist $\mathcal{D} = \Sigma \otimes \Sigma'$.

Dazu beweisen wir, dass \mathcal{D} ein Dynkin-System ist, welches den (schnittstabilen!) Erzeuger $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\Sigma, \Sigma')$ (siehe Definition 8.1) enthält. Aus Satz 1.15 folgt dann nämlich $\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$ und daraus

$$\Sigma \otimes \Sigma' = \sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D} \subseteq \Sigma \otimes \Sigma'.$$

Für $B \in \Sigma$ und $B' \in \Sigma'$ ist offenbar

$$(B \times B')_x = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } x \notin B \\ B' & \text{falls } x \in B, \end{cases}$$

also $x \mapsto \mu'_{B \times B'}(x) = \mathbf{1}_B(x) \mu'(B')$ messbar. Daher gilt $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$.

Wir weisen nun für \mathcal{D} die Eigenschaften eines Dynkin-Systems nach. Offenbar ist $\emptyset \in \mathcal{D}$, denn $\mu'(\emptyset_x) = \mu'(\emptyset) = 0$ für alle $x \in X$, und konstante Abbildungen sind messbar.

Sei $A \in \mathcal{D}$. Dann ist wegen $(A^c)_x = (A_x)^c$ auch

$$x \mapsto \mu'_{A^c}(x) = \mu'(A_x^c) = \mu'(Y) - \mu'(A_x) = \mu'(Y) - \mu'_A(x)$$

messbar (Satz 5.5). Also gilt $A^c \in \mathcal{D}$.

Sei $(A_n)_n$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{D} \subseteq \Sigma \otimes \Sigma'$, und $A := \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Dann gilt $A_x = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (A_n)_x$ (ebenfalls disjunkte Vereinigung!), und daher

$$\mu'(A_x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu'((A_n)_x) \quad (x \in X).$$

Daraus folgt die Messbarkeit von μ'_A , also $A \in \mathcal{D}$. Damit ist \mathcal{D} ein Dynkin-System und die Behauptung für endliches μ' bewiesen.

Ist schließlich μ' nur σ -endlich, so existiert eine Folge $(B'_n)_n$ in Σ' mit $B'_n \nearrow Y$ und $\mu'(B'_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\mu'_A(x) = \mu'(A_x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu'(A_x \cap B'_n)$$

für alle $A \in \Sigma \otimes \Sigma'$ und $x \in X$. Nach dem bereits Bewiesenen ist jede Funktion $x \mapsto \mu'(A_x \cap B'_n)$ messbar, und daher auch μ'_A . \square

Als einen Höhepunkt dieses Abschnitts können wir nun die Existenz und Eindeutigkeit eines sogenannten Produktmaßes beweisen.

Satz 8.6. *Seien (X, Σ, μ) und (Y, Σ', μ') σ -endliche Maßräume. Dann gibt es genau ein Maß ν auf $\Sigma \otimes \Sigma'$ mit*

$$\nu(B \times B') = \mu(B) \mu'(B') \quad (8.2)$$

für alle $B \in \Sigma$ und $B' \in \Sigma'$. Für $A \in \Sigma \otimes \Sigma'$ gilt außerdem

$$\nu(A) = \int_X \mu'(A_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(A^y) d\mu'(y).$$

Man schreibt $\mu \otimes \mu' := \nu$ und nennt dies das **Produktmaß** (von μ und μ').

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt leicht aus dem Maßeindeutigkeitssatz 3.17. Wir verzichten auf die Details. Für $A \in \Sigma \otimes \Sigma'$ setzen wir

$$\nu(A) := \int_X \mu'(A_x) d\mu(x).$$

Wegen Lemma 8.5 ist $\nu(A) \in [0, \infty]$ wohldefiniert. Wir zeigen: ν ist ein Maß auf $\Sigma \otimes \Sigma'$, welches (8.2) erfüllt.

Für $B \in \Sigma$ und $B' \in \Sigma'$ ist $\mu'((B \times B')_x) = \mathbf{1}_B(x) \mu'(B')$, also

$$\nu(B \times B') = \int_X \mathbf{1}_B(x) \mu'(B') d\mu(x) = \mu(B) \mu'(B').$$

Dies zeigt (8.2).

Offenbar gilt $\nu(\emptyset) = 0$, denn $\mu'(\emptyset_x) = \mu'(\emptyset) = 0$ für alle $x \in X$. Sei nun $(A_n)_n$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\Sigma \otimes \Sigma'$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \int_X \mu'\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)_x\right) d\mu(x) = \int_X \mu'\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n)_x\right) d\mu(x) \\ &= \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \mu'((A_n)_x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \mu'((A_n)_x) d\mu(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n). \end{aligned}$$

Dabei wurde das Korollar 5.22 zum Satz von Beppo Levi benutzt. Dies schließt den Existenzbeweis ab.

Die erste Gleichheit der Zusatzbehauptung gilt nun nach Konstruktion von ν , die zweite ist aus Symmetriegründen und aufgrund der Eindeutigkeit ebenfalls richtig. \square

Wir spezialisieren für $r, s \in \mathbb{N}$ auf den Fall

$$(X, \Sigma, \mu) = (\mathbb{R}^r, \mathcal{B}^r, \lambda^r), \quad \text{und} \quad (Y, \Sigma', \mu') = (\mathbb{R}^s, \mathcal{B}^s, \lambda^s)$$

in Satz 8.6. Dann ist mit $d = r+s$

$$(X \times Y, \Sigma \otimes \Sigma', \mu \otimes \mu') = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d, \lambda^d),$$

denn nach Beispiel 8.3 ist $\mathcal{B}^r \otimes \mathcal{B}^s = \mathcal{B}^d$ und es gilt $\lambda^r \otimes \lambda^s = \lambda^d$, da diese Maße auf Quadern übereinstimmen und damit auch auf der von den Quadern erzeugten σ -Algebra $\mathcal{B}^r \otimes \mathcal{B}^s = \mathcal{B}^d$. Insbesondere gilt dies für $s = 1$. Das Ergebnis ist als Cavalieri'sches Prinzip bekannt.

Satz 8.7 (Cavalieri'sches Prinzip). Sei $d \geq 2$, $M \in \mathcal{B}^d$ und (wie oben)

$$M^x := \{(x_1, \dots, x_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1} : (x_1, \dots, x_{d-1}, x) \in M\}$$

für $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lambda^d(M) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^{d-1}(M^x) dx.$$

Insbesondere folgt für $M, N \in \mathcal{B}^d$ aus $\lambda^{d-1}(M^x) = \lambda^{d-1}(N^x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dass $\lambda^d(M) = \lambda^d(N)$ gilt. Oft wird auch diese Aussage als Cavalieri'sches Prinzip bezeichnet.

Beispiel 8.8. Sei $B_r^d := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 \leq r\}$ die euklidische Vollkugel um 0 mit Radius $r \geq 0$. Man setzt

$$\omega_d := \lambda^d(B_1^d)$$

für das Volumen der euklidischen Einheitskugel. Mit Satz 4.11 gilt

$$\lambda^d(B_r^d) = \lambda^d(rB_1^d) = r^d \lambda^d(B_1^d) = r^d \omega_d.$$

Offenbar ist $B_1^1 = [-1, 1]$, also $\omega_1 = 2$. Mit Cavalieri gilt

$$\begin{aligned} \omega_d &= \int_{\mathbb{R}} \lambda^{d-1}((B_1^d)^x) dx = \int_{-1}^1 \lambda^{d-1}(B_{\sqrt{1-x^2}}^{d-1}) dx \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}^{d-1} \omega_{d-1} dx = 2 \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{d-1}{2}} dx \cdot \omega_{d-1}. \end{aligned}$$

Für $d = 2$ hat man also

$$\omega_2 = 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) dx = \pi.$$

Für $d = 3$ erhält man

$$\omega_3 = 2 \int_0^1 (1-x^2) dx \omega_2 = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \pi = \frac{4}{3} \pi.$$

Nach der Konstruktion des Produktmaßes stellt sich natürlich die Frage, wie man nun bzgl. dieses Maßes integriert. Die Antwort wird schrittweise gegeben, nach der sogenannten "Aufsteigermethode": zuerst für charakteristische Funktionen, dann für positive, einfache Funktionen, dann für positive, messbare Funktionen, und schliesslich für integrierbare Funktionen. Die ersten drei Schritte sind im folgenden Satz zusammengefasst.

Satz 8.9 (Satz von Tonelli). Seien (X, Σ, μ) und (Y, Σ', μ') σ -endliche Maßräume und sei $f: X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ messbar (bzgl. $\Sigma \otimes \Sigma'$). Dann sind die Funktionen

$$x \mapsto \int_Y f(x, y) d\mu'(y) \quad \text{und} \quad y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$$

messbar und es gilt

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \mu') = \int_X \int_Y f(x, y) d\mu'(y) d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x, y) d\mu(x) d\mu'(y).$$

Beweis. Wir zeigen nur die erste Gleichheit, die zweite ergibt sich analog bzw. aus der Symmetrie der Situation.

Für $A \in \Sigma \otimes \Sigma'$ ist $\mathbf{1}_A(x, \cdot) = \mathbf{1}_{A_x}$ und daher $\int_Y \mathbf{1}_A(x, y) d\mu'(y) = \mu'(A_x)$. Dies ist messbar als Funktion von x (Lemma 8.5) und es gilt

$$\int_X \int_Y \mathbf{1}_A(x, y) d\mu'(y) d\mu(x) = \int_X \mu'(A_x) d\mu(x) = (\mu \otimes \mu')(A) = \int_{X \times Y} \mathbf{1}_A d(\mu \otimes \mu')$$

nach Satz 8.6. Also gilt die Behauptung für charakteristische Funktionen. Weil alle Ausdrücke additiv und positiv-homogen in f sind, gilt die Behauptung dann auch für positive, einfache Funktionen.

Sei nun f positive und messbar. Dann gibt es eine Folge $(f_n)_n$ positiver, einfacher Funktionen mit $f_n \nearrow f$. Für jedes $x \in X$ gilt dann $f_n(x, \cdot) \nearrow f(x, \cdot)$ und damit

$$\int_Y f_n(x, \cdot) d\mu' \nearrow \int_Y f(x, \cdot) d\mu'$$

nach dem Satz von der monotonen Konvergenz. Es folgt dass die Funktion

$$x \mapsto \int_Y f(x, \cdot) d\mu'$$

messbar ist und, wieder wegen des Satzes von Beppo Levi,

$$\begin{aligned} \int_X \int_Y f_n(x, \cdot) d\mu' d\mu(x) &\nearrow \int_X \int_Y f(x, \cdot) d\mu' d\mu(x) \\ &= \\ \int_{X \times Y} f_n d(\mu \otimes \mu') &\nearrow \int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \mu'). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Unser nächstes Ziel ist ein dem Satz von Tonelli entsprechendes Ergebnis für integrierbare Funktionen. Im Gegensatz zur Messbarkeit folgt aus der Integrierbarkeit von f nicht wie in Lemma 8.4 die der Funktionen f_x und f^y . Beispielsweise ist für jede Funktion $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $f: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 < y \leq 1, \\ g(x) & \text{falls } y = 0, \end{cases}$$

integrierbar bezüglich $\lambda^2 = \lambda^1 \otimes \lambda^1$, da $f(x, y) = 0$ λ^2 -fast überall. Aber $f^0 = g$ muss nicht λ -integrierbar sein.

Satz 8.10 (Satz von Fubini). Seien (X, Σ, μ) und (Y, Σ', μ') σ -endliche Maßräume und sei $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar (bzgl. $\mu \otimes \mu'$). Dann gilt:

(1) Für μ -fast alle x ist f_x μ' -integrierbar und für μ' -fast alle y ist f^y μ -integrierbar.

(2) Die durch

$$F_1(x) = \begin{cases} \int_Y f_x \, d\mu' & \text{falls } f_x \text{ integrierbar,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$F_2(y) = \begin{cases} \int_X f^y \, d\mu & \text{falls } f^y \text{ integrierbar,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

definierten Funktionen sind integrierbar und es gilt

$$\int_{X \times Y} f \, d(\mu \otimes \mu') = \int_X F_1 \, d\mu = \int_Y F_2 \, d\mu'.$$

Im Grunde ist es egal, wie man F_1 und F_2 an den Stellen definiert, an denen f_x bzw. f^y nicht integrierbar sind. Denn diese sind Nullmengen, und Abänderung des Integranden auf einer Nullmenge ändert den Wert des Integrals nicht (Satz 5.31). In diesem Sinne kann man auch Integrale von Funktionen betrachten, die auf einer Nullmenge *überhaupt nicht definiert* sind. Interpretiert man die Integrale in diesem Sinne, so stimmt die letzte Formel im Satz von Fubini mit der aus dem Satz von Tonelli überein.

Beweis von Satz 8.10. (1) Die Messbarkeit der Funktionen f_x und f^y erhält man aus Lemma 8.4. Der Satz von Tonelli liefert

$$\int_X \int_Y |f| \, d\mu' \, d\mu = \int_{X \times Y} |f| \, d(\mu \otimes \mu') < \infty.$$

Nach Satz 5.31 gilt

$$\int_Y |f_x| \, d\mu' = \int_Y |f(x, y)| \, d\mu'(y) < \infty \quad \text{für } \mu\text{-fast alle } x.$$

Daher ist f_x μ' -integrierbar für μ -fast alle x . Das Ergebnis für f^y folgt analog.

(2) Da f_x für μ -fast alle x integrierbar ist, folgt die Messbarkeit von F_1 mit Satz 5.31 und der Zerlegung $f = f_+ - f_-$ wie im Satz von Tonelli. Außerdem liefert der Satz von Tonelli, dass

$$\int_X |F_1| \, d\mu \leq \int_X \int_Y |f| \, d\mu' \, d\mu = \int_{X \times Y} |f| \, d(\mu \otimes \mu') < \infty,$$

also F_1 integrierbar ist. Analog erhält man die Integrierbarkeit von F_2 .

Die letzte Formel gilt nach dem Satz von Tonelli mit f_{\pm} an Stelle von f . Aber hieraus folgt die Formel auch für f . \square

Zusammenfassend erhält man aus den Sätzen von Tonelli und Fubini auch folgendes Resultat.

Satz 8.11. Seien (X, Σ, μ) und (Y, Σ', μ') σ -endliche Maßräume und sei $f: X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar (bzgl. $\Sigma \otimes \Sigma'$). Ist

$$\int_X \int_Y |f| \, d\mu' \, d\mu < \infty \quad \text{oder} \quad \int_Y \int_X |f| \, d\mu \, d\mu' < \infty,$$

so ist f integrierbar und es gilt

$$\int_{X \times Y} f \, d(\mu \otimes \mu') = \int_X \int_Y f \, d\mu' \, d\mu = \int_Y \int_X f \, d\mu \, d\mu'.$$

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt $\int_{X \times Y} |f| \, d(\mu \otimes \mu') < \infty$ mit dem Satz von Tonelli, also dass f produkt-integrierbar ist. Deshalb kann Fubini angewandt werden, und es ergibt sich der Rest der Aussage. \square

9 Die Transformationsformel

Ab jetzt schreiben wir nur noch

$$dx \text{ statt } d\lambda^d(x).$$

Die Transformationsformel, um die es jetzt gehen soll, beschreibt, wie sich das Lebesguemaß unter *nicht-linearen* Koordinatenwechseln verhält. Zur Erinnerung: Satz 4.11 zusammen mit der Translationsinvarianz der Lebesguemaßes impliziert

$$\lambda^d(g(B)) = |\det T| \lambda^d(B) \quad (B \in \mathcal{B}^d),$$

wobei $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine *affin-lineare* Abbildung der Form $g(x) = Tx + c$ und $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ dabei eine invertierbare, *lineare* Abbildung ist. Dies ergibt die Formel

$$\int_V f(y) dy = \int_U f(g(x)) |\det T| dx \quad (9.1)$$

für $A, U \in \mathcal{B}^d$, $V = g(U)$ und $f = \mathbf{1}_A$ (man setze $B = U \cap g^{-1}(A)$). Durch Übergang zunächst zu einfachen Funktionen f (alle Ausdrücke sind additiv und positiv-homogen) und dann via monotone Approximation von unten (Satz von Beppo Levi) sieht man, dass (9.1) sogar für alle positiven, messbaren Funktionen f gilt. Und dann auch für integrierbare Funktionen $f \in \mathcal{L}^1(V)$ mittels der Zerlegung $f = f^+ - f^-$.⁴

Wir fragen: wie verändert sich diese Formel, wenn man die Forderung der Linearität an T fallen lässt. Zur Formulierung der Antwort benötigen wir den folgenden, aus Analysis 2 bekannten Begriff.

Definition 9.1. Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Eine bijektive Abbildung $g: U \rightarrow V$ heißt C^1 -**Diffeomorphismus**, wenn g und g^{-1} beide stetig differenzierbar sind.

Für stetig differenzierbares $g: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ bezeichnen wir mit $g'(x)$ die totale Ableitung von g in x , d.h. die Jacobi-Matrix $J_g(x) = (\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x))_{i,j}$. (Andere gebräuchliche Schreibweisen sind $Dg(x)$ oder dg_x .) Nach dem Umkehrsatz aus Analysis 2 ist eine injektive Abbildung $g: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ genau dann ein C^1 -Diffeomorphismus aufs Bild $V = g(U)$, wenn sie stetig differenzierbar und $g'(x)$ in jedem Punkt $x \in U$ invertierbar ist. Mit $y = g(x)$ folgt dann aus der Kettenregel $(g^{-1})'(y) = g'(x)^{-1}$. Wir bezeichnen mit

$$\det g'(x) := \det J_g(x)$$

die Determinante der Jacobimatrix von g bei x (bzw. irgendeiner Matrixdarstellung von $g'(x)$).

Zur Verallgemeinerung von (9.1) bemühen wir die alte Idee, dass differenzierbare Funktionen *im Kleinen affin-linear* sind. Sei also $g: U \rightarrow V$ ein C^1 -Diffeomorphismus und $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wir schreiben U als abzählbare Vereinigung $U = \bigcup_j Q_j$ paarweise disjunkter Quader Q_j und wählen noch $x_j \in Q_j$. Dann hat man

$$g(x) \approx g(x_j) + g'(x_j)(x - x_j) =: g_j(x) \quad (x \in Q_j),$$

wobei der Fehler klein ist, wenn Q_j hinreichend klein ist. Weil f und g' stetig sind, gilt dann auch

$$f \circ g \approx f \circ g_j \quad \text{und} \quad g' \approx g'(x_j) \quad \text{auf } Q_j.$$

Beachte, dass g_j affin-linear mit linearem Anteil $g'(x_j)$ ist. Daher folgt aus (9.1)

$$\int_{g(U)} f(y) dy = \sum_j \int_{g(Q_j)} f(y) dy \approx \sum_j \int_{g_j(Q_j)} f(y) dy$$

⁴Dies ist wieder die "Aufsteigermethode", wie wir sie aus dem Beweis des Satzes von Tonelli kennen.

$$\begin{aligned}
&= \sum_j \int_{Q_j} f(g_j(x)) |\det g'_j(x)| dx \\
&\approx \sum_j \int_{Q_j} f(g(x)) |\det g'_j(x)| dx = \int_U f(g(x)) |\det g'(x)| dx.
\end{aligned}$$

Diese heuristische Überlegung plausibilisiert den folgenden Satz.

Satz 9.2 (Transformationsformel). *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $g: U \rightarrow V$ ein C^1 -Diffeomorphismus und $f: V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Genau dann ist $f: V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ über V integrierbar, wenn $(f \circ g) \cdot |g'|$ über U integrierbar ist. In diesem Fall, oder wenn nur $f \geq 0$ ist, gilt*

$$\int_V f(y) dy = \int_U f(g(x)) |\det g'(x)| dx. \quad (9.2)$$

Bemerkung 9.3. (1) Die Formel (9.1) ist ein Spezialfall von (9.2), denn für eine affin-lineare Abbildung g der Form $g(x) = Tx + c$ mit linearem Anteil T ist ja $g'(x) \equiv T$ konstant.

(2) Ersetzt man in (9.2) die Funktion f durch $f \mathbf{1}_{g(A)}$ für eine messbare Menge $A \subseteq U$, so erhält man wegen $\mathbf{1}_{g(A)} \circ g = \mathbf{1}_A$ die Formel

$$\int_{g(A)} f(y) dy = \int_A f(g(x)) |\det g'(x)| dx.$$

(3) Für $d = 1$ ergibt sich ein Spezialfall der Substitutionsregel. Sei dazu $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann ist g streng monoton. Falls g steigt, ist $g'(x) = |\det g'(x)|$, $g(a) < g(b)$ und $g([a, b]) = [g(a), g(b)]$. Die Transformationsformel bekommt dann die Gestalt

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy = \int_a^b f(g(x)) g'(x) dx. \quad (9.3)$$

Fällt g , so ist $-g'(x) = |\det g'(x)|$ und man erhält ebenfalls (9.3) (wie geht das genau?).

Bevor wir einen Beweis der Transformationsformel geben, schauen wir uns einige typische Anwendungen an.

9.4 (Ebene Polarkoordinaten). Die Abbildung

$$g: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(r, \theta) := (r \cos \theta, r \sin \theta),$$

heißt **Polarkoordinatenabbildung**. Eingeschränkt auf $U := (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ ist g ein C^1 -Diffeomorphismus mit Bild

$$g(U) = \mathbb{R}^2 \setminus N, \quad N = \{(x, 0) : x \leq 0\} = (-\infty, 0] \times \{0\},$$

und Jacobimatrix

$$J_g(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \text{also mit } |\det g'(r, \theta)| = r.$$

Weil $\mathbb{R}^2 \setminus g(U) = N$ eine Nullmenge ist und daher für das Integral keine Rolle spielt, erhalten wir aus (9.2) die Formel

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

für messbare Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty]$ bzw. integrierbare Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Auf den rechten Teil kann man dann falls erforderlich noch Fubini anwenden und die Integrationsreihenfolge vertauschen.

Setzt man beispielweise $f = \mathbf{1}_{B_1^2}$, die charakteristische Funktion der Einheitskreisscheibe, so ergibt sich

$$\omega_2 = \lambda^2(B_1^2) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{B_1^2}(x, y) d(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 r dr d\theta = (2\pi) \cdot \frac{1}{2} = \pi,$$

was wir ja schon wissen.

Beispiel 9.5 (Gauß-Integral). Wir berechnen das Integral $J := \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$. Es gilt

$$\begin{aligned} J^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr \\ &= (-\pi) e^{-r^2} \Big|_{r=0}^{r=\infty} = \pi. \end{aligned}$$

Also ist $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

9.6 (Zylinderkoordinaten). Ersetzt man in Dimension $d = 3$ zwei der drei Koordinaten durch Polarkoordinaten und lässt dabei die dritte Koordinate unverändert, so spricht man von **Zylinderkoordinaten**. Die zugehörige Abbildung ist also (zum Beispiel)

$$g(r, \theta, z) := (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

wobei (r, θ) wie oben aus $(0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ zu nehmen ist. Die Funktionalmatrix ist

$$J_g(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ihre Determinante $\det g'(r, \theta, z) = r$.

Zylinderkoordinaten sind dann sinnvoll, wenn man es mit einem bezüglich einer Koordinatenachse (im Beispiel: der z -Achse) rotationssymmetrischen Objekt zu tun hat. Wie in $d = 2$ wird eine Nullmenge, nämlich die Halbebene

$$N = \{(x, 0, z) : x \leq 0, z \in \mathbb{R}\}$$

bei der Parametrisierung ausgelassen. Diese spielt aber wieder keine Rolle bei der Integration.

Beispiel 9.7 (Die durchbohrte Kugel). Seien $0 \leq a < b$ und

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2, x^2 + y^2 \geq a^2\}.$$

Es ist K also derjenige Teil der (abgeschlossenen) Kugel vom Radius b um 0, der außerhalb des (offenen) Zylinders vom Radius a um die z -Achse liegt; vgl. Abbildung 7.

In Zylinderkoordinaten wird K bis auf eine Nullmenge N (welche?) durch die Menge

$$L := \{(r, \theta, z) : \theta \in (-\pi, \pi), a^2 \leq r^2, r^2 + z^2 \leq b^2\}$$

parametrisiert. (Wie sieht man das genau?) Es folgt

$$\begin{aligned} \lambda^3(K) &= \lambda^3(K \setminus N) = \int_{K \setminus N} \mathbf{1} d(x, y, z) = \int_L \det g'(r, \theta, z) d(r, \theta, z) \\ &= \int_a^b \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\sqrt{b^2-r^2}}^{\sqrt{b^2-r^2}} r dz d\theta dr \\ &= \int_a^b \int_{-\pi}^{\pi} 2r \sqrt{b^2-r^2} d\theta dr = 2\pi \int_a^b 2r \sqrt{b^2-r^2} dr \\ &= -2\pi \frac{2}{3} (b^2-r^2)^{3/2} \Big|_{r=a}^{r=b} = \frac{4\pi}{3} (b^2-a^2)^{3/2}. \end{aligned}$$

Für $a = 0$ ergibt sich insbesondere – wie bereits in Beispiel 8.8 berechnet – das Volumen einer Vollkugel von Radius b zu $\frac{4\pi}{3} b^3$.

Ist h die „Höhe“ des Rings K (siehe Abbildung 7), so gilt $\frac{1}{2}h = \sqrt{b^2-a^2}$ und damit $\lambda^3(K) = \frac{1}{6}\pi h^3$. Bei gegebenem h hängt $\lambda^3(K)$ also nicht vom Kugelradius b ab. Tatsächlich hängt für $K^z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in K\}$ bei festem h auch $\lambda^2(K^z)$ nicht von b ab. Damit liefert auch das Cavalieri'sche Prinzip, dass $\lambda^3(K)$ bei festem h unabhängig von b ist.

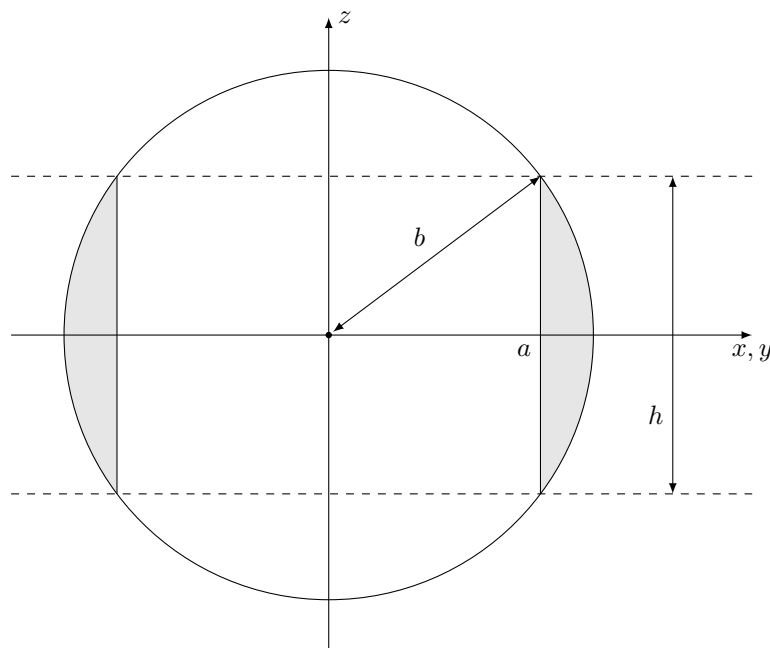


Abbildung 7: Durchbohrte Kugel.

9.8 (Massenverteilung und Schwerpunkt eines inhomogenen Körpers). In der Mechanik werden starre Körper mathematisch modelliert einerseits durch Angabe einer kompakten Menge $K \subseteq \mathbb{R}^3$ zusammen mit einer stetigen oder auch nur messbaren Funktion $\rho: K \rightarrow [0, \infty)$, die als **Massenverteilung**, auch **Massendichte** genannt, interpretiert wird: für jeden Punkt $x = (x_1, x_2, x_3) \in K$ gibt $\rho(x)$ an, wieviel Masse im infinitesimalen Volumenelement dx bei x konzentriert ist. Ist ρ konstant, so nennt man den Körper **homogen**, ansonsten **inhomogen**. Die Gesamtmasse des Körpers ist dann

$$m = \int_K \rho(x) dx$$

und man setzt natürlich $0 < m < \infty$ voraus.

Der **Schwerpunkt** des Körpers ist

$$s = \frac{1}{m} \int_K x \rho(x) dx = \left(\frac{1}{m} \int_K x_j \rho(x) dx \right)_{j=1,2,3} \in \mathbb{R}^3.$$

Denkt man sich den Körper im Schwerpunkt fixiert, aber gleichzeitig um ihn frei drehbar, so bleibt er bei als homogen gedachtem Gravitationsfeld in Ruhe, in welche Ausgangslage man ihn auch dreht.

(Für die Interessierten: Das liegt daran, dass bei homogenem Gravitationsfeld $0 \neq v \in \mathbb{R}^3$ jeder Punkt $x \in K$ einen Beitrag von

$$(\rho(x) dx) v \times (x - p) = v \times (x - p) \rho(x) dx$$

(\times ist das Kreuzprodukt) zum Drehmoment bezüglich $p \in \mathbb{R}^3$ liefert, das Gesamtdrehmoment also

$$v \times \int_K (x - p) \rho(x) dx = v \times \left(\int_K x \rho(x) dx - mp \right)$$

beträgt. Und dies ist genau dann gleich 0 für alle Wahlen von v , wenn $p = s$ der Schwerpunkt ist.)

Schwerpunkte von Flächen $A \subseteq \mathbb{R}^2$ werden z.B. dadurch definiert, dass man zur Scheibe $B = A \times [0, \varepsilon]$ der Dicke $\varepsilon > 0$ übergeht, deren Schwerpunkt (als homogener Körper) s_ε

berechnet und diesen dann zurück auf die xy -Ebene projiziert. Dies liefert

$$s = \left(\frac{1}{\lambda^2(A)} \int_A x \, d(x, y), \frac{1}{\lambda^2(A)} \int_A y \, d(x, y) \right),$$

unabhängig von $\varepsilon > 0$.

Beispiel 9.9 (Schwerpunkt einer Halbkreisscheibe). Es sei $a > 0$ und

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0\}$$

der oberhalb der x -Achse gelegene Teil des im Ursprung zentrierten Vollkreises mit Radius a . Es gilt

$$\lambda^2(K) = \frac{1}{2} \lambda^2(B_a^2) = \frac{\pi a^2}{2}.$$

Bis auf eine Nullmenge (welche?) wird K in Polarkoordinaten durch die Menge

$$L := \{(r, \theta) : 0 < r \leq a, 0 \leq \theta < \pi\}$$

parametrisiert. Die y -Komponente des Schwerpunkts von K ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} s_y &= \frac{1}{\lambda^2(K)} \int_K y \, d(x, y) = \frac{1}{\lambda^2(K)} \int_{K \setminus N} y \, d(x, y) = \frac{1}{\lambda^2(K)} \int_L r \sin \theta \cdot r \, d(r, \theta) \\ &= \frac{1}{\lambda^2(K)} \int_0^a \int_0^\pi r^2 \sin \theta \, d\theta \, dr = \frac{1}{\lambda^2(K)} \int_0^a r^2 (-\cos \theta) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} \, dr \\ &= \frac{2}{\lambda^2(K)} \int_0^a r^2 \, dr = \frac{4}{3\pi} r. \end{aligned}$$

Für die x -Komponente ergibt sich $s_x = 0$, weil K achsen-symmetrisch zur y -Achse ist. In der Tat: setze $g(x, y) = (-x, y)$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dann ist $|\det g'| = |-1| = 1$ und $g(K) = K$, also

$$s_x = \int_K x \, d(x, y) = \int_{g(K)} x \, d(x, y) = \int_K (-x) \, d(x, y) = -s_x,$$

und daraus $s_x = 0$.

9.10 (Kugelkoordinaten). Kugelkoordinaten sind die dreidimensionale Verallgemeinerung der Polarkoordinaten. Ein Punkt $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit $p \neq 0 = (0, 0, 0)$ wird beschrieben durch seinen Abstand

$$r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

zum Ursprung 0 , den Winkel $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, den der Vektor $\vec{0p}$ mit der xy -Ebene einschliesst und dem Winkel $\theta \in (-\pi, \pi]$, den die Projektion p' von p auf die xy -Ebene mit der positiven x -Achse einschliesst (vgl. Abb. 8). Es gilt daher

$$z = r \sin \varphi$$

und — da der Abstand von p' zum Ursprung gerade $r \cos \varphi$ ist —

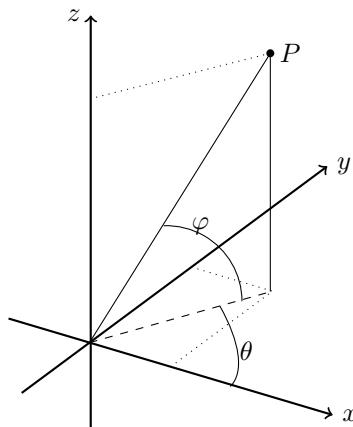
$$x = r \cos \varphi \cos \theta, \quad \text{und} \quad y = r \cos \varphi \sin \theta.$$

Wir betrachten also die Abbildung $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$g(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ r \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Die entsprechende Jacobimatrix ist

$$J_g(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\theta) & -r \cos(\varphi) \sin(\theta) & -r \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ \cos(\varphi) \sin(\theta) & r \cos(\varphi) \cos(\theta) & -r \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \sin(\varphi) & 0 & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Abbildung 8: Kugelkoordinaten für $P = (x, y, z)$.

Die Funktionaldeterminante ist dann

$$\det J_g(r, \theta, \varphi) = r^2 \cos(\varphi).$$

Um einen C^1 -Diffeomorphismus zu erhalten, schränkt man sich auf den Parameterbereich $r \in (0, \infty)$, $\theta \in (-\pi, \pi)$ und $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ein, d.h.

$$U := (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Im Bild wird dann die Menge

$$N := \{(x, 0, z) : x \leq 0\}$$

ausgelassen. Dies ist aber eine Nullmenge, also für Integration nach dem Lebesguemaß unwesentlich. Aus dem Transformationssatz erhält man so die Formel

$$\int_{\mathbb{R}^3} f \, d\lambda^3 = \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(g(r, \theta, \varphi)) r^2 \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta \, dr \quad (9.4)$$

für messbare Funktionen $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, \infty]$ und integrierbare Funktionen $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, wobei natürlich die Integrationsreihenfolge im rechten Integral wieder geändert werden darf.

Besonders einfach wird dies, wenn f **radialsymmetrisch** ist, d.h., wenn f die Form $f(x) = h(\|x\|_2)$ für eine Funktion h auf $(0, \infty)$ hat. Dann wird (9.4) nämlich zu

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x) \, dx = 3\omega_3 \int_0^\infty h(r) r^2 \, dr.$$

(Nachrechnen!)

Beispiel 9.11. Es sei K ein Körper in Form einer Halbkugel mit Radius $a > 0$ derart, dass für seine Massendichte $\rho: K \rightarrow [0, \infty]$ gilt

$$\rho(x) = a - \|x - M\|_2,$$

wobei M der Mittelpunkt der Kugel (bzw. des Basiskreises der Halbkugel) ist. Wie groß ist die Masse von K ?

Dazu nehmen wir ohne Einschränkung $M = 0$ und

$$K = \{x = (x_1, x_2, x_3) : x_3 \geq 0, \|x\|_2 \leq a\}$$

an. Bis auf eine Nullmenge wird K durch die Polarkoordinaten $r \in (0, a)$, $\theta \in (-\pi, \pi)$ und $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ beschrieben. Also gilt

$$\begin{aligned} \int_K \rho(x) \, dx &= \int_K (a - \|x\|_2) \, dx = \int_{-\pi}^\pi \int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a - r) r^2 \cos(\varphi) \, d\varphi \, dr \, d\theta \\ &= 2\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\varphi) \, d\varphi \cdot \int_0^a (ar^2 - r^3) \, dr = 2\pi \left(\frac{a}{3} a^3 - \frac{1}{4} a^4 \right) = \frac{1}{6} \pi a^4. \end{aligned}$$

Aufgabe. Behandeln Sie erneut die “durchbohrte Kugel” aus Beispiel 9.7, aber nun mittels Kugelkoordinaten.

Aufgabe. Berechnen Sie (erneut) $\omega_3 = \frac{4}{3}\pi$, nun mittels Kugelkoordinaten.

Aufgabe. Was verändert sich, wenn man bei der Beschreibung eines Punktes $P \in \mathbb{R}^3$ nicht den Winkel φ von \vec{OP} mit der xy -Ebene, sondern den Winkel φ' von \vec{OP} mit der (positiven) z -Achse verwendet?

Beweis der Transformationsformel

Wir wollen nun die Transformationsformel, also Satz 9.2, beweisen. Sei dazu immer $g: U \rightarrow V$ ein C^1 -Diffeomorphismus und $\lambda: V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

1. Schritt: Da g , g^{-1} und $\det g'$ stetig sind und $\det(g')$ nirgends verschwindet, ist die Funktion $(f \circ g)|\det(g')|$ genau dann messbar, wenn f messbar ist.⁵ Nimmt man dies an, so bleibt die Formel (9.2) zu beweisen. Indem man hier $f = f_+ - f_-$ schreibt kann man dabei ohne Einschränkung noch $f: V \rightarrow [0, \infty]$ annehmen.

2. Schritt: Nun überlegen wir uns, dass dafür schon die Ungleichung

$$\int_V f \, d\lambda \leq \int_U (f \circ g) |\det g'| \, d\lambda \quad (9.5)$$

hinreichend ist. Denn wenden wir diese Ungleichung auf $(f \circ g)|\det g'|$ statt f und auf g^{-1} statt g an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_U (f \circ g) |\det g'| \, d\lambda &\leq \int_V (f \circ g \circ g^{-1}) |\det g' \circ g^{-1}| \cdot |\det(g^{-1})'| \, d\lambda \\ &= \int_V f \, d\lambda, \end{aligned}$$

also die noch fehlende andere Ungleichung.

3. Schritt: Durch Approximation von unten führt man (9.5) zunächst auf einfache und dann auf charakteristische Funktionen $f = \mathbf{1}_B$ für messbare Mengen $B \subseteq V$ zurück. Letztere entsprechen den messbaren Mengen $A \subseteq U$ via $B = g(A)$. Es reicht daher, die Ungleichung

$$\lambda(g(A)) \leq \int_A |\det g'| \, d\lambda \quad (9.6)$$

für alle Borelmengen $A \in \mathcal{B}^d$ zu zeigen.

4. Schritt: Die Ungleichung (9.6) gilt, wenn $A \subseteq U$ ein kompakter, nicht-entarteter Würfel ist.

Beweis. Sei $l > 0$ die Seitenlänge von A und $\alpha \geq 0$ mit

$$\lambda(g(A)) = \alpha \int_A |\det g'| \, d\lambda.$$

Das gibt es, weil $\det g'$ nirgends verschwindet und A nichtleeres Inneres hat, das Integral rechts also > 0 sein muss.

Wir zerlegen A in 2^d kompakte Würfel A' der halben Seitenlänge $l/2$. Für mindestens einen dieser Würfel, den wir A_1 nennen, muss die Ungleichung

$$\lambda(g(A_1)) \geq \alpha \int_{A_1} |\det g'| \, d\lambda$$

⁵Wir meinen hier Borel-Messbarkeit. Am Ende werden wir sehen, dass es aber auch für Lebesgue-Messbarkeit stimmt.

gelten. Sonst wäre nämlich

$$\lambda(g(A)) \leq \sum_{A'} \lambda(g(A')) < \sum_{A'} \alpha \int_{A'} |\det g'| \, d\lambda = \alpha \int_A |\det g'| \, d\lambda$$

im Widerspruch zur Wahl von α . (Hier benutzt man, dass die kompakten Würfel A' zwar nicht paarweise disjunkt, aber ihre Durchschnitte Nullmengen sind.)

Als nächstes wendet man dieses Verfahren rekursiv an und erhält eine absteigende Folge kompakter Würfel A_n mit Seitenlänge $l_n := 2^{-n}l \rightarrow 0$ und

$$\lambda(g(A_n)) \geq \alpha \int_{A_n} |\det g'| \, d\lambda \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Nach dem Intervallschachtelungsprinzip gibt es $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Ohne Einschränkung kann man dabei $a = 0 = g(a)$ annehmen (warum?). Die Differenzierbarkeit von g in $a = 0$ bedeutet dann

$$g(x) = Tx + r(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{\|x\|} = 0,$$

wobei $T := g'(0) \in \text{Lin}(\mathbb{R}^d)$ die Ableitung von g in $a = 0$ ist. Für gegebenes $\varepsilon > 0$ erhält man $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\|g(x) - Tx\|_\infty = \|r(x)\|_\infty < \varepsilon l_n \quad (n \geq n_\varepsilon, x \in A_n).$$

(Wir verwenden hier stets die Maximumsnorm auf \mathbb{R}^d .) Dies bedeutet

$$g(A_n) \subseteq \text{B}[T(A_n); \varepsilon l_n] = l_n \text{B}[T(A_n/l_n); \varepsilon] \quad (n \geq n_\varepsilon).$$

Nun nimmt man das Lebesguemaß und erhält

$$\alpha \int_{A_n} |\det g'| \, d\lambda \leq \lambda(g(A_n)) \leq l_n^d \lambda(\text{B}[T(A_n/l_n); \varepsilon]).$$

Man hat $A'_n := A_n/l_n = b_n + [0, 1]^d$ mit $b_n \in [-1, 0]^d$. Indem man zu einer Teilfolge übergeht, kann man annehmen, dass $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ existiert. Weil T stetig ist, gilt dann

$$\begin{aligned} \text{B}[T(A_n/l_n); \varepsilon] &= \text{B}[T(b_n + [0, 1]^d); \varepsilon] \\ &\subseteq \text{B}[T(b + [0, 1]^d); 2\varepsilon] = Tb + \text{B}[T([0, 1]^d); 2\varepsilon] \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ genügend groß. Es folgt

$$\alpha \frac{1}{\text{vol}(A_n)} \int_{A_n} |\det g'| \, d\lambda \leq \lambda(\text{B}[T([0, 1]^d); 2\varepsilon]) \quad (n \text{ genügend groß}).$$

Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ ergibt, weil $|\det g'|$ stetig ist,

$$\alpha |\det g'(0)| \leq \lambda(\text{B}[T([0, 1]^d); 2\varepsilon]).$$

Nun war aber $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Setzt man $\varepsilon = \frac{1}{m}$ für $m \in \mathbb{N}$ so ergibt der Grenzübergang $m \rightarrow \infty$

$$\alpha |\det g'(0)| \leq \lambda(T([0, 1]^d)) = |\det T| = |\det g'(0)|$$

mit Satz 4.11. Es folgt $\alpha \leq 1$ und daraus die Behauptung. \square

5. Schritt: Die Ungleichung (9.6) gilt für alle messbaren Mengen $A \subseteq U$.

Beweis. Ist $A = (a, b]$ ein links-offener Würfel so findet man leicht kompakte Würfel $A_n \subseteq A$ mit $A_n \nearrow A$. Dann ist auch $g(A_n) \nearrow g(A)$ und aus

$$\lambda(g(A_n)) \leq \int_{A_n} |\det g'| \, d\lambda$$

(im 4. Schritt gezeigt) folgt die Behauptung durch Grenzübergang $n \rightarrow \infty$.

Nach Lemma 1.8 ist jede offene Menge disjunkte Vereinigung von links-offenen Würfeln. Also gilt (9.6) für *offene* Mengen $A \subseteq U$.

Sei nun schließlich $A \subseteq U$ eine Borelmenge. Setze $U_n := [|\det g'| < n]$. Dann ist $U_n \subseteq U$ offen und $U_n \nearrow U$. Es folgt $A_n := A \cap U_n \nearrow A$, daher reicht es, (9.6) für A_n anstelle von A zu zeigen. Mit anderen Worten: man kann annehmen, dass $\det g'$ auf U beschränkt ist.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert nach Satz 4.1 eine offene Menge $O \supseteq A$ mit $\lambda(O \setminus A) \leq \varepsilon$. Indem man zu $U \cap O$ übergeht, kann man $O \subseteq U$ annehmen. Nach dem bereits Gezeigten gilt

$$\begin{aligned} \lambda(g(A)) &\leq \lambda(g(O)) \leq \int_O |\det g'| \, d\lambda = \int_A |\det g'| \, d\lambda + \int_{O \setminus A} |\det g'| \, d\lambda \\ &\leq \int_A |\det g'| \, d\lambda + \varepsilon \sup_{x \in U} |\det g'(x)|. \end{aligned}$$

Also folgt mit $\varepsilon \rightarrow 0$ die Behauptung. □

Teil II

Gewöhnliche
Differentialgleichungen

1 Definition und einführende Beispiele

Eine Gleichung der Form

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.1)$$

heißt **gewöhnliche Differentialgleichung** (gew. Dgl.) **n -ter Ordnung**. Dabei sind $n \in \mathbb{N}$ und

$$F: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$$

gegeben. Die Menge D heißt **Definitionsbereich** der DGL (1.1).

Eine **Lösung** der DGL (1.1) ist eine auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte und n -mal stetig differenzierbare Funktion $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit

- (i) $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) \in D$ für alle $x \in I$, und
- (ii) $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ für alle $x \in I$.

Das Definitionsintervall I der Lösung heißt das zugehörige **Lösungsintervall**. Dabei verstehen wir ab jetzt ist unter "Intervall" immer ein *nicht-ausgeartetes* Intervall, also eines mit strikt positiver Länge.

Das Wort "gewöhnlich" in "gewöhnliche Differentialgleichungen" bezeichnet den Umstand, dass in (1.1) nur Ableitungen einer einzigen Variable vorkommen und eine Lösung eine Funktion einer Veränderlichen ist. Gleichungen, in denen partielle Ableitungen vorkommen und deren Lösungen Funktionen mehrerer Veränderlicher sind, heißen "partielle Differentialgleichungen" und werden hier nicht behandelt.

Kann die Dgl. in die Form

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

gebracht werden, so spricht man von einer **expliziten** (gew.) Differentialgleichung. Andernfalls nennt man die Differentialgleichung **implizit**.

Bemerkungen 1.1. (1) Was eine Lösung ist hängt offenbar davon ab, wie die Menge D gewählt wird. Wenn f durch einen Term gegeben ist, gibt es in der Regel einen "natürlichen" Definitionsbereich von f , der dann mitgedacht wird. Dennoch sollte der Einfluss der Wahl von D auf den Lösungsbegriff nie vergessen werden.

(2) Ist $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von (1.1), so auch jede Einschränkung $y|_J$ auf ein Teilintervall $J \subseteq I$. Man kann also eigentlich nie von "der", sondern immer nur von "einer" Lösung einer DGL sprechen. Allerdings kommt es vor, dass alle Lösungen immer durch ein und denselben Term (in dem ggf. noch freie Parameter vorkommen) gegeben sind, und hier spricht man dann manchmal von "der" allgemeinen Lösung.

(3) Eine Lösung $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ einer DGL heißt **maximal**, wenn sie nicht Einschränkung einer auf einem echt größeren Lösungsintervall $J \supseteq I$ definierten Lösung ist.

Beispiel 1.2. Wir betrachten die DGL

$$y' + 2xy = 0 \text{ (implizit)}, \quad \text{oder} \quad y' = -2xy \text{ (explizit)}.$$

Hier ist natürlicherweise $D = \mathbb{R}^3$, $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x, y, z) = z + 2xy$. Eine Lösung auf \mathbb{R} (und damit auf jedem Teilintervall $I \subseteq \mathbb{R}$) ist

$$y(x) := e^{-x^2},$$

denn es gilt

$$y'(x) = -2xe^{-x^2} = -2xy(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Andere Lösungen sind:

$$y(x) = ce^{-x^2} \quad \text{für beliebiges (festes) } c \in \mathbb{R}.$$

Umgekehrt ist jede Lösung $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ von dieser Form, denn

$$(ye^{x^2})' = y'e^{x^2} + 2xye^{x^2} = -2xye^{x^2} + 2xye^{x^2} = 0,$$

also ist $ye^{x^2} \equiv c$ konstant. Die "allgemeine Lösung" der Dgl. ist also $y(x) = ce^{-x^2}$, wobei $c \in \mathbb{R}$ ein freier Parameter ist. Insofern man diese Lösungen als auf ganz \mathbb{R} definiert ansieht, handelt es sich um maximale Lösungen.

Typischerweise ist die Lösung einer Differentialgleichung (1.1) also *nicht* eindeutig, in der Regel gibt es unendlich viele Lösungen, sogar auf ein und demselben Lösungsintervall. Eindeutigkeit der Lösung kann erst durch zusätzliche Bedingungen erzwungen werden, wie z.B. sogenannte **Anfangsbedingungen**

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Betrachtet man die Gleichung (1.1) zusammen mit solchen Anfangsbedingungen, so spricht man von einem **Anfangswertproblem**.

Statt Anfangsbedingungen können aber auch andere Bedingungen gefordert werden, etwa sogenannte **Randbedingungen**, beispielsweise $y(a) = y_a$ und $y(b) = y_b$ für Lösungen y auf dem Intervall $[a, b]$. Eine Differentialgleichung zusammen mit Randbedingungen nennt man ein **Randwertproblem**.

Bei Differentialgleichungen ergeben sich die folgenden Fragestellungen:

- (a) Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen;
- (b) Berechnung von Lösungen (möglich nur in speziellen Fällen);
- (c) Eigenschaften von Lösungen (insbes. falls (b) versagt);
- (d) Numerische Lösung.

In diesem Kurs behandeln wir zunächst (b), dann (a). Später wird auch etwas zu (c) gesagt. Punkt (d) wird in der Numerischen Mathematik behandelt.

1.3 (Richtungsfeld). Eine explizite Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' = f(x, y)$$

lässt sich geometrisch interpretieren. Der Graph einer Lösung y ist eine Kurve in \mathbb{R}^2 derart, dass ihre Steigung im Punkt (x, y) genau $f(x, y)$, der Tangentenvektor dort also gleich $(1, f(x, y))$ ist.

Ein **Vektorfeld** ist einfach eine Abbildung von einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^d nach \mathbb{R}^d . Das Vektorfeld

$$D \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (1, f(x, y))$$

heißt das zur Dgl. gehörige **Richtungsfeld**. Eine Lösung der Dgl. ist dann eine Kurve, die in jedem Punkt genau in Richtung der vorgegebenen Tangente verläuft, vgl. Abbildung 9.

Falls $f = f(x, y)$ nur von y aber nicht von x abhängt, erhält man effektiv also eine Dgl. der Form

$$y' = f(y). \tag{1.2}$$

Solche Differentialgleichungen heißen **autonom**. Das Richtungsfeld ist dann invariant unter horizontalen Verschiebungen, und mit jeder Lösung $y = y(x)$ von (1.2) und $c \in \mathbb{R}$ ist auch $y(x + c)$ eine Lösung.

Nullstellen der Funktion $f = f(y)$ heißen auch **Ruhelagen** (Equilibria) der Gleichung (1.2). Dies sind genau die Punkte p derart, dass die konstante Funktion $y(x) \equiv p$ eine Lösung ist. Konstante Lösungen nennt man auch **Gleichgewichtslösungen**.

Beispiel 1.4 (Radioaktiver Zerfall). Gegeben sei eine radioaktive Substanz der Anfangsmasse $y_0 > 0$. Für $t \geq 0$ sei $y(t)$ die zur Zeit t noch nicht zerfallene Masse. Das *Zerfallsgesetz* besagt: die Änderung der Masse pro Zeiteinheit

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}$$

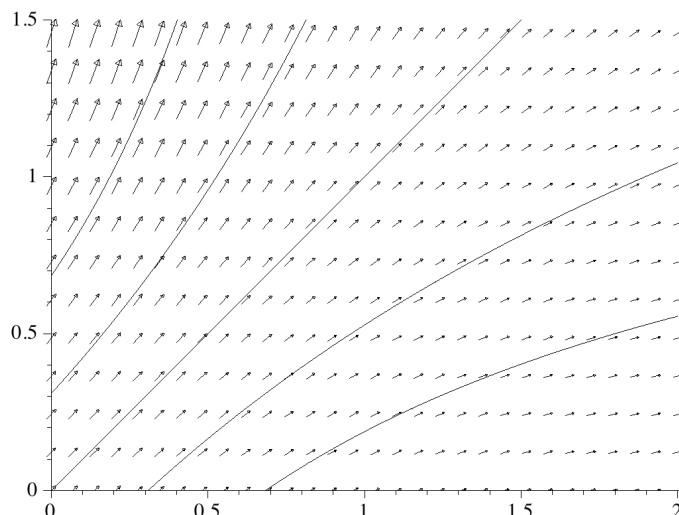


Abbildung 9: (Skaliertes) Richtungsfeld zur Dgl. $y' = (1 + y^2)/(1 + x^2)$. Die Lösungen sind von der Form $y(x) = \tan(\arctan(x) + c)$ mit $c \in \mathbb{R}$.

is proportional zur noch vorhandenen Masse $y(t)$. Für $\Delta t \rightarrow 0$ ergibt sich die Dgl.

$$y'(t) = -\lambda y(t)$$

mit einer *Zerfallskonstanten* $\lambda > 0$. Die zu lösende Dgl. (bzw. das AWP) ist also:

$$y' = -\lambda y, \quad y(0) = y_0.$$

Behauptung: Die auf jedem Intervall $I \ni 0$ eindeutige Lösung ist $y(t) = y_0 e^{-\lambda t}$.

[Durch Nachrechnen findet man, dass dies eine Lösung ist. Die Eindeutigkeit sieht man so: ist y eine Lösung, so ist $(ye^{\lambda t})' = 0$ also $c := ye^{\lambda t}$ konstant. Einsetzen von $t = 0$ ergibt $c = y(0) = y_0$.]

Die *Halbwertszeit* T ist definiert durch $y(T) = \frac{1}{2}y(0)$. Man findet $y_0 e^{-\lambda T} = y(T) = \frac{1}{2}y_0$, also $T = \frac{1}{\lambda} \ln 2$, unabhängig von y_0 . (Uran 238: $4,47 \cdot 10^9$ Jahre, Plutonium: 24.000 Jahre usw.)

Beispiel 1.5 (Harmonische Schwingung mit Reibungswiderstand). Es sei $x = x(t)$ der (zeitabhängige) Ort eines homogenen Körpers der Masse m . (Man stellt sich dabei die Masse in einem Punkt $x(t)$, dem Schwerpunkt des Körpers, konzentriert vor.) Nach dem *Newton'schen Gesetz* erfüllt x die Dgl.

$$m\ddot{x} = K(t),$$

wobei $K(t)$ die Summe der zum Zeitpunkt t auf den Körper wirkenden Kräfte ist. (Man schreibt traditionell $\dot{x} := x'$ und $\ddot{x} := x''$.) Im allgemeinen ist $x(t) \in \mathbb{R}^3$, aber in speziellen Situationen hat man auch $x(t) \in \mathbb{R}^2$ oder sogar $x(t) \in \mathbb{R}$.

Beispiel: Ein Körper der Masse m ist an einer Feder befestigt und kann horizontal schwingen. Zu jedem Zeitpunkt ist $K = K_1 + K_2$, mit:

- $K_1(t) = -kx(t)$ die *Rückstellkraft* der Feder (Hooke'sches Gesetz, k *Federkonstante*);
- $K_2(t) = -\beta\dot{x}(t)$ der Reibungswiderstand ("Stoßdämpfer").

Man erhält die gew. Dgl. 2. Ordnung

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0.$$

Wir betrachten zuerst den Fall $\beta = 0$, d.h. es gibt keine Reibung (ungedämpfte Schwingung). Ansatz: $x(t) = \cos(\omega t)$. Dann gilt

$$\dot{x}(t) = -\omega \sin(\omega t), \quad \text{und} \quad \ddot{x}(t) = -\omega^2 \cos(\omega t).$$

Es folgt $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Eine Lösung der DLG. ist dann $x(t) = \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}x)$.

Im Fall $\beta > 0$ sprechen wir von einer gedämpften Schwingung. Das Verhalten des Systems hängt dann entscheidend davon ab, wie groß β ist. Falls β klein ist, dann ergibt sich eine Schwingung mit abnehmendem Ausschlag (Amplitude). Falls β groß ist, dann tritt keine Schwingung auf, sondern der Körper geht langsam in die Ruhelage im Nullpunkt über.

Beispiel 1.6 (Populationsgleichungen). Es bezeichne $y(t)$ die Menge der Affen (in kg!) auf einer (unendlich großen) Insel. Bei günstigen Fortpflanzungsbedingungen ist der relative Zuwachs $\frac{y'}{y} = a$ konstant, man erhält die Dgl.

$$y' = ay.$$

Die allgemeine Lösung ist $y(t) = ce^{at}$ (s.o.). Auf lange Sicht ist exponentielles Wachstum unrealistisch, man muss das Modell verfeinern.

Allgemeiner: In einem Lebensraum gibt es d Tier- und Pflanzenarten, deren Populationen (irgendwie quantifiziert) zur Zeit t durch die Funktionen $y_1(t), \dots, y_d(t)$ beschrieben werden. Zuwachs- oder Abnahme hängt von Gesamtzustand ab:

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(t, y_1, \dots, y_d) \\ y'_2 = f_2(t, y_1, \dots, y_d) \\ \vdots \\ y'_d = f_d(t, y_1, \dots, y_d) \end{cases}$$

Dies ist ein sogenanntes Differentialgleichungs-**System**. Fasst man die Komponenten y_j im Vektor $y = (y_1, \dots, y_d)$ und die Funktionen f_j im Vektorfeld $f = (f_1, \dots, f_d)$ zusammen, so wird dieses System zu

$$y' = f(t, y),$$

also einer expliziten Dgl. erster Ordnung, nun aber mit einer vektorwertigen Funktion (Kurve) y .

Beispiel: Räuber-Beute-System (Lotka-Volterra-Modell). Für reelle Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ beschreibt das System

$$\begin{aligned} x' &= (\alpha - \beta y)x \\ y' &= (-\gamma + \delta x)y \end{aligned}$$

ein sogenanntes Räuber-Beute-Modell. Hier ist x die Quantität einer Beute- (“Karpfen”) und y die einer Räuberspezies (“Hechte”), die in einem Habitat koexistieren. Die (x, y) -Ebene wird dann als **Phasenraum** des Systems bezeichnet. Der Punkt $p := (\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ ist ein sogenannter **Gleichgewichtspunkt** des Systems, d.h. die konstante Kurve $(x(t), y(t)) \equiv p$ ist eine Lösung der Dgl.

Modellierung

Die Beschreibung einer außermathematischen Situation mithilfe von Mathematik nennt man (*Mathematische*) *Modellierung*. Dabei werden immer gewisse Aspekte der ursprünglichen Situation nicht berücksichtigt. Sofern man sich dieser Aspekte bewusst ist, spricht man von *Idealisierungen*.

In den angegebenen Beispielen liegen einige Idealisierungen offen zutage. Das fängt schon damit an, dass man ursprünglich diskrete Größen durch kontinuierliche ersetzt, wie etwa bei den Zerfallsprozessen oder den Populationsmodellen. Dazu kommt, dass man mit einer Ableitung ja eine *momentane* Änderungsrate erfasst, diese aber gar nicht beobachtet werden kann.

Natürlich stellt sich hier die Frage, inwiefern jeweils gewisse Idealisierungen gerechtfertigt sind. Die Antwort hängt stark vom Kontext und den Wertentscheidungen und Zielen derer

ab, die eine mathematische Modellierung anstrengen. Mathematische Argumente können dabei höchstens sekundieren.

Im Beispiel des radioaktiven Zerfalls könnte man etwa anführen, dass hier nur sehr große Ansammlungen von Atomen betrachtet werden, d.h. bei entsprechender Skalenwahl eine kontinuierliche Veränderung der betrachteten Größe angenommen werden kann. Dieses Argument "zieht" aber nur, wenn man weiß, was am Ende mit dem Resultat der Modellierung tatsächlich gemacht wird, welche Schlüsse daraus gezogen werden. Ob etwas "ins Gewicht fällt" oder nicht, ob eine Zahl groß oder klein ist, ist keine mathematische Frage mehr.

So banal diese Bemerkung klingt, so leicht wird sie übersehen. Je besser man nämlich mit einem mathematischen Modell umgehen kann, desto mehr ist man geneigt, die inhärenten Idealisierungen zu vergessen und das Modell mit der realweltlichen Situation zu identifizieren. Die eingebauten Wertentscheidungen werden dann entweder gar nicht mehr als solche wahrgenommen oder als objektiv gegeben angesehen. Angesichts des enormen Einflusses, den mathematische Modelle heute haben, kann eine solche "Betriebsblindheit" großen Schaden anrichten.

2 Elementare Lösungsmethoden

Das explizite Lösen von Dgl'en ist eine Kunst, die sich systematischer Lehre entzieht. In diesem Abschnitt behandeln wir einige einfache Typen.

Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Wir betrachten die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' + g(x)y = b(x) \quad (2.1)$$

Hierbei sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $b, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig. Die Funktion b nennt man **Inhomogenität**. Ist $b = 0$ so erhält man die **homogene Dgl**.

$$y' + g(x)y = 0. \quad (2.2)$$

Wir lösen zuerst die homogene Gleichung (2.2). Sei G eine Stammfunktion von g auf I . Multiplizieren von (2.2) mit $e^{G(x)}$ ergibt (Produktregel!)

$$0 = y'e^G + G'y e^G = (y e^G)'$$

Dies liefert $c \in \mathbb{R}$ mit $y e^G \equiv c$, also $y = c e^{-G}$. Geht man diese Schritte rückwärts, so ergibt sich, dass auch wirklich für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$y(x) := c e^{-G(x)} \quad (x \in I)$$

eine Lösung von (2.2) ist. Damit ist die homogene Gleichung (2.2) vollkommen verstanden.

Eine Idee zur Lösung der inhomogenen Gleichung (2.1) heißt **Variation der Konstanten**. Man geht von einer Lösung $y_h \neq 0$ von (2.2) aus und sucht eine Lösung von (2.1) der Form

$$y = C y_h \quad \text{wobei } C = C(x) \quad (2.3)$$

nun nicht mehr konstant ist. Mit diesem Ansatz ist

$$y' + g y = (C y_h)' + g y = C' y_h + C (y_h' + g y_h) = C' y_h.$$

Das bedeutet: y wie in (2.3) ist genau dann eine Lösung von (2.1), wenn $C' = \frac{b}{y_h}$, d.h. C eine Stammfunktion von $\frac{b}{y_h}$ ist. Wählt man nun mit C_0 eine feste solche Stammfunktion, so ist

$$y = (C_0 + c) y_h \quad (c \in \mathbb{R})$$

die Gesamtheit aller Lösungen, die sogenannte **allgemeine Lösung** von (2.1). Mit der Funktion G von oben kann man schreiben

$$y(x) = e^{-G(x)} \int b(x) e^{G(x)} dx.$$

Beispiel 2.1. Wir betrachten das AWP

$$y' - 2xy = 1, \quad y(0) = 1.$$

Dies ist eine (inhomogene) lineare Differentialgleichung 1. Ordnung wie in (2.1), mit $g(x) = -2x$ und $b(x) = 1$.

Die zugehörige homogene DGL ist $y' - 2xy = 0$. Eine Lösung davon ist $y_h(x) = e^{x^2}$, denn eine Stammfunktion von $g(x) = -2x$ ist $G(x) = -x^2$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl. ist:

$$y(x) = e^{x^2} \int e^{-x^2} dx = e^{x^2} \left[c + \int_0^x e^{-t^2} dt \right].$$

Der Wert von c ergibt sich aus der Anfangsbedingung:

$$1 = y(0) = e^0 [c + 0] = c.$$

Die Lösung des AWP's ist also

$$y(x) = e^{x^2} + e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Bemerkung: Die sogenannte "error function" $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ ist eine wichtige Funktion in der Statistik.

Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

Hier geht es um AWP's der Form

$$y' = f(x)g(y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (2.4)$$

Dabei sind $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle⁶ und

$$f: I_1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g: I_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

sind stetige Funktionen, und $(x_0, y_0) \in I_1 \times I_2$. (Das Richtungsfeld lebt also auf dem Rechteck $I_1 \times I_2$.)

Wenn $g(y_0) = 0$ ist, dann ist offensichtlich $y \equiv y_0$ (konstant) eine Lösung. Im folgenden sei darum $g(y_0) \neq 0$ angenommen. Sei $J \subseteq I_2$ ein Intervall in $[g \neq 0]$ mit $y_0 \in J$.

Finden einer Lösung: Wir nehmen an, wir haben schon eine Lösung $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ von (2.4) mit $y(I) \subseteq J$. Dann kann man

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

schreiben. Seien F, G Stammfunktionen von f und $\frac{1}{g}$ auf I bzw. J (die kann man immer finden). Dann ist

$$\frac{d}{dx} (G(y) - F(x)) = G'(y)y' - f(x) = \frac{y'}{g(y)} - f(x) = 0,$$

also $G(y) - F(x) \equiv c$ konstant. Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt $c = c_0 := G(y_0) - F(x_0)$. Die Lösung y erfüllt also die Gleichung

$$G(y) = F(x) + c_0. \quad (2.5)$$

⁶Wir erinnern uns an unsere Vereinbarung, dass wir mit "Intervall" stets ein nicht-ausgeartetes Intervall meinen.

Da $\frac{1}{g}$ auf J sein Vorzeichen nicht wechselt, ist G streng monoton, also bijektiv aufs Bild $G(J)$. Aus (2.5) folgt dann

$$F(I) + c_0 \subseteq G(J) \quad \text{und} \quad y(x) = G^{-1}(F(x) + c_0) \quad (x \in I).$$

Insbesondere ist y eindeutig bestimmt.

Existenz der Lösung. Offenbar ist die Inklusion $F(I) + c_0 \subseteq G(J)$ notwendig für die Existenz einer Lösung von (2.4) auf dem Intervall I . Nimmt man diese Inklusion als gegeben an, so kann man einfach nachrechnen, dass $y(x) := G^{-1}(F(x) + c_0)$ eine Lösung von (2.4) ist.⁷ Wir haben also den folgenden Satz bewiesen:

Satz 2.2. Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und seien $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$. Seien weiter F, G Stammfunktionen von f und $\frac{1}{g}$ auf I bzw. J . Sei schließlich $(x_0, y_0) \in I \times J$ ein Punkt und $c_0 := G(y_0) - F(x_0)$. Dann gilt:

Das AWP (2.4) hat genau dann eine Lösung $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ auf I , wenn $F(I) + c_0 \subseteq G(J)$ ist. In diesem Fall ist dann $y = y(x)$ die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $G(y(x)) = F(x) + c_0$, also $y(x) = G^{-1}(F(x) + c_0)$.

Beispiel 2.3. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = x(1 + y^2), \quad y(0) = 1.$$

Dieses ist vom obigen Typ, mit $I_1 = I_2 = \mathbb{R}$, $f(x) = x$ und $g(y) = 1 + y^2$. Man kann $J = \mathbb{R}$ wählen. Wir schreiben

$$\frac{y'}{1 + y^2} = x, \quad \arctan(y) = \frac{1}{2}x^2 + c, \quad c = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

also

$$y = y(x) = \tan\left(\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (x \in I).$$

Dies gilt für jedes Intervall I um 0 mit

$$F(I) + \frac{\pi}{4} \subseteq \arctan(\mathbb{R}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Wegen $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ kann man I maximal als $I = \left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$ wählen. Eine Fortsetzung der Lösung auf ein größeres Intervall ist offenbar nicht möglich.

In diesem Beispiel ist das gefundene Intervall I das größte Intervall um den Anfangswert 0 derart, dass $y(x) = \tan(x^2/2 + \pi/4)$ definiert ist. Diese "naive" Methode kann aber schiefgehen, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 2.4. (Auslaufen einer Tonne.)

In einem zylindrischen Behälter der Grundfläche A befindet sich Wasser, das aber durch ein Loch im Boden der Grundfläche B (mit $B \ll A$) herausläuft. Wie verhält sich dabei (idealerweise) die Füllhöhe $h = h(t)$?

Wir wollen diese Frage mittels einer DGL für $h(t)$ beantworten. Dazu benutzen wir *Toricellis Gesetz*

$$v = \sqrt{2gh}$$

wobei $v = v(t)$ die Ausflussgeschwindigkeit am Loch und g die Gravitationskonstante ist⁸

Dazu kommt noch die Strömungskonstanz:

$$V' = A \cdot h' = -B \cdot v,$$

⁷Dieses "Nachrechnen" besteht i.W. aus dem Durchlaufen der Schritte von oben in umgekehrter Reihenfolge.

⁸siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Ausflussgeschwindigkeit>. Sehr grob vereinfacht: tritt ein Quantum Flüssigkeit (der Masse m) unten aus, so sackt die Wassersäule darüber nach unten. Dabei verliert das System potentielle Energie, die dem austretenden Quantum als kinetische Energie mitgegeben wird, diese ist $\frac{1}{2}mv^2$. Der Verlust an potentieller Energie ist derselbe, der auftritt wenn dasselbe Quantum von ganz oben bis ganz unten fallen würde, also mgh .

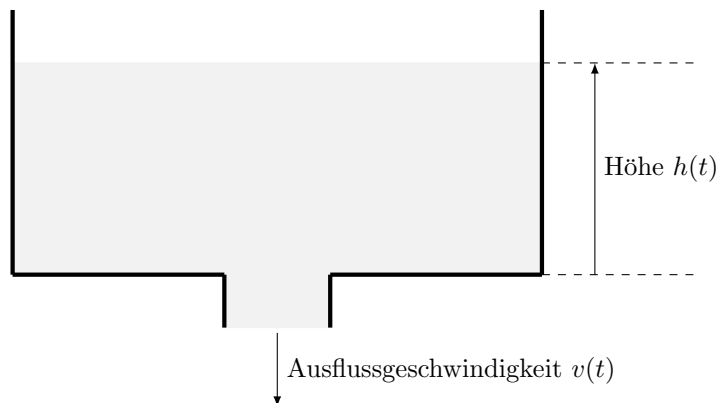


Abbildung 10: Auslaufen einer Tonne.

wobei $V = V(t)$ das Volumen der Flüssigkeit in der Tonne ist. (Dies bedeutet, dass die Volumenabnahme im Behälter genau einer Volumenzunahme im Ausfluss entspricht.) Fasst man beides zusammen, so ergibt sich das Anfangswertproblem

$$h' = -2\alpha\sqrt{h}, \quad h(0) = h_0 > 0,$$

mit der Konstante $\alpha = (B/A)\sqrt{g/2} > 0$.

Dies ist eine DGL mit getrennten Veränderlichen, Definitionintervallen $I_1 = \mathbb{R}$ und $I_2 = [0, \infty)$ (der Wasserstand kann nicht negativ sein), sowie

$$f(t) = -\alpha, \quad \text{und} \quad g(h) = 2\sqrt{h}.$$

Stammfunktionen F und G (von f bzw. $\frac{1}{g}$) sind

$$F(t) = -\alpha t, \quad \text{und} \quad G(h) = \sqrt{h},$$

und es folgt

$$c_0 = G(h_0) - F(t_0) = \sqrt{h_0}, \quad \text{und} \quad \sqrt{h(t)} = G(h(t)) = F(t) + c_0 = -\alpha t + \sqrt{h_0}$$

also $h(t) = (\sqrt{h_0} - \alpha t)^2$.

Um Satz 2.2 anzuwenden, muss man $J = (0, \infty)$ wählen. (Damit $g(h) \neq 0$ für $h \in J$.) Die Bedingung $F(I) + c_0 \subseteq G(J)$ entspricht

$$F(I) + \sqrt{h_0} \subseteq (0, \infty),$$

also $F(I) \subseteq (-\sqrt{h_0}, \infty)$. Für $t \in \mathbb{R}$ gilt $-\alpha t = F(t) \in (-\sqrt{h_0}, \infty)$ genau dann, wenn $t \in (-\infty, \sqrt{h_0}/\alpha)$. Wir setzen $t_1 := \sqrt{h_0}/\alpha$ und können dann Satz 2.2 mit $I = (-\infty, t_1)$ anwenden.

Bemerkungen:

- 1) Für $t \rightarrow t_1$ hat man $h(t) \rightarrow 0$ und $h'(t) \rightarrow 0$. Der Flüssigkeitspegel in der Tonne sinkt also gegen 0.
- 2) Die Funktion $h(t) = (\sqrt{h_0} - \alpha t)^2$ ist für $t > t_1$ keine Lösung der Dgl. $h' = -2\alpha\sqrt{h}$ (sondern der Dgl. $h' = 2\alpha\sqrt{h}$). Man kann also nicht einfach "natürliche" Definitionsbereiche von Funktionen mit maximalen Lösungsintervallen identifizieren.
- 3) Die gefundene Lösung auf $(-\infty, t_1)$ ist aber trotzdem nicht maximal, denn man kann sie zur (physikalisch sinnvollen) Lösung

$$\tilde{h}(t) := \begin{cases} (\sqrt{h_0} - \alpha t)^2 & (t \leq t_1) \\ 0 & (t \geq t_1) \end{cases}$$

fortsetzen. Diese Fortsetzung, siehe Abbildung 10, kann man aber nicht aus Satz 2.2 gewinnen.

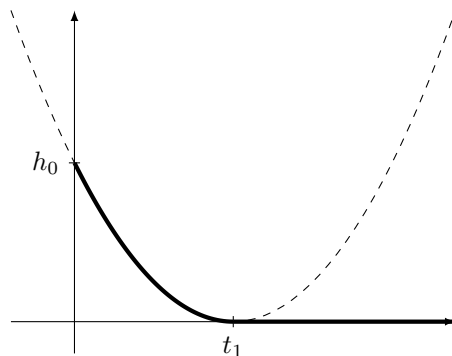


Abbildung 11: Lösung des Anfangswertproblems zum Auslaufen einer Tonne.

- 4) Die Funktion \tilde{h} aus 3) löst offenbar das AWP

$$h' = -2\alpha\sqrt{h}, \quad h(t_1) = 0.$$

Allerdings tut das auch die Funktion $h_1(t) \equiv 0$ und ebenso jede Funktion der Form $h_2(t) = \tilde{h}(t+c)$ mit $c \geq 0$. Physikalisch bedeutet das, dass man einer leeren Tonne nicht ansehen kann, wann sie leergelaufen ist, oder ob sie überhaupt jemals voll war. Mathematisch lernen wir, dass auch Anfangswertprobleme mehrere verschiedene maximale Lösungen haben können.⁹

Beispiel 2.5. (Affen auf einer Insel.)

Sei $y = y(t)$ die Affenpopulation auf einer Insel zum Zeitpunkt t . Wie schon gesagt ist es unrealistisch, dauerhaft einen konstanten relativen Zuwachs $y'/y \equiv a$ anzunehmen. Wird die Affenpopulation größer, werden die natürlichen Ressourcen kleiner und die Reproduktionsrate sinken. Man korrigiert daher den relativen Zuwachs zu

$$y'/y = a(b - y),$$

wobei $b > 0$ eine ‘Grenzpopulation’ ist. Dies ergibt die sogenannte **logistische Gleichung**

$$y' = a(b - y)y. \quad (2.6)$$

Diese Gleichung ist von der Form (2.4) mit

$$f(t) \equiv a, \quad \text{und} \quad g(y) = (b - y)y.$$

Die Nullstellen von g sind $y = 0$ und $y = b$, was zu den Gleichgewichtslösungen $y \equiv 0$ und $y \equiv b$ führt.

Eine Stammfunktion von f ist $F(t) = at$. Um eine Stammfunktion G von $1/g$ zu finden benutzen wir zuerst Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{g(y)} = \frac{1}{y(b - y)} = \frac{1}{b} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{b - y} \right).$$

Da $\log|y|$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{y}$ ist für $y \neq 0$ ist, erhalten wir

$$G(y) = \frac{1}{b} (\log|y| - \log|b - y|) = \frac{1}{b} \log \left| \frac{y}{b - y} \right|.$$

Für eine Lösung $y = y(t)$ gilt daher

$$\frac{1}{b} \log \left| \frac{y(t)}{b - y(t)} \right| = G(y(t)) = F(t) + c_0 = at + c_0,$$

⁹Man könnte sich daran stören, dass 0 gewissermaßen am Rand des Definitionsbereichs $D = \mathbb{R}_+$ der Funktion $f = f(h) = -2\sqrt{h}$ liegt. Dies kann dadurch behoben werden, dass man einfach zur Dgl. $h' = -2c\sqrt{|h|}$ übergeht. Nun darf eine Lösung auch negativ werden. Offensichtlich entsprechen die Lösungen der ursprünglichen Gleichung genau den positiven Lösungen der modifizierten Gleichung.

also

$$\frac{y}{b-y} = \pm e^{bc_0} e^{abt}.$$

Wir setzen $d_0 := \pm e^{-bc_0} = \pm \frac{1}{e^{bc_0}}$. Auflösen nach y ergibt

$$y(t) = \frac{b}{1 + d_0 e^{-abt}}.$$

Anfangswert $y_0 = y(0)$ und Parameter d_0 entsprechen sich über die Beziehung

$$y_0 = \frac{b}{1 + d_0}, \text{ bzw. } d_0 = \frac{b}{y_0} - 1.$$

Man sieht:

- 1) Für $0 < y_0 < b$ ist $d_0 > 0$ und y ist auf ganz \mathbb{R} definiert. Es gilt $y(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow -\infty$ und $y(t) \rightarrow b$ für $t \rightarrow \infty$. Die Lösung nähert sich also jeweils einer der beiden Gleichgewichtslösungen an.
- 2) Für $y_0 > b$ folgt $d_0 \in (-1, 0)$. In diesem Fall hat der Nenner von $y(t)$ eine Nullstelle bei $x_* = \frac{1}{ab} \log(-d_0)$. Es gilt $x_* < 0$. Dies hat zur Folge, dass die zugehörige Lösung dort eine vertikale Asymptote besitzt, und darum nicht über diesen "Zeitpunkt" hinaus fortgesetzt werden kann. Wir erhalten eine maximale Lösung auf (x_*, ∞) .

Substitutionsmethoden

Manchmal kann man eine DGL durch eine geschickte Substitution auf eine elementar lösbare Gleichung zurückführen. Wir besprechen einige Beispiele.

Lineare Substitution: Man betrachtet

$$y' = f(y + ax + b).$$

Hier bemüht man die Substitution $z = y + ax + b$. Dann ist $z' = y' + a = f(z) + a$, und diese Gleichung hat getrennte Variablen. Man löst diese und geht dann zu $y = z - ax - b$ über.

Beispiel 2.6. Wir betrachten die Gleichung $y' = (y+4x)^2$. Mit $z = y+4x$ ist $z' = y' + 4 = z^2 + 4$. Daraus folgt dann:

$$\frac{z'}{z^2+4} = 1, \quad \frac{1}{2} \arctan \frac{z}{2} = x + c_0, \quad z = 2 \tan(2x + c_0), \quad y = 2 \tan(2x + C) - 4x.$$

Homogene Dgl. (auch: Ähnlichkeitsdgl.): Hier geht es um Gleichungen der Form

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Man substituiert $z = \frac{y}{x}$, also $y = xz$, $f(z) = y' = z + xz'$ und daher

$$z' = \frac{1}{x}(f(z) - z).$$

Dies ist wieder eine DGL mit getrennten Variablen. Hat man eine Lösung z dieser Gleichung, so ist $y = xz$ eine Lösung der ursprünglichen Gleichung.

Beispiel 2.7. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{y}{x} - 1 - e^{-\frac{y}{x}}, \quad y(1) = 0.$$

Mit $f(z) = z - 1 - e^{-z}$ und $z = z(x)$ folgt

$$z' = -\frac{1}{x}(1 + e^{-z}), \quad \frac{-1}{x} = \frac{e^z z'}{1 + e^z}, \quad \log(1 + e^z) = c_0 - \log|x|, \quad e^z = \frac{c_0}{|x|} - 1.$$

Man findet $z = \log\left(\frac{c_0}{|x|} - 1\right)$ und also

$$y(x) = x \log\left(\frac{c_0}{|x|} - 1\right)$$

Dies ist eine Lösung der Dgl. auf $(-c_0, 0)$ und $(0, c_0)$. Die Anfangsbedingung $y(1) = 0$ liefert $y(x) = x \log\left(\frac{2}{x} - 1\right)$ auf $(0, 2)$. Dies ist eine maximale Lösung, und sie ist auf jedem Intervall, das $x_0 = 1$ enthält, eindeutig.

Bernoulli'sche Differentialgleichung: Die sogenannte *Bernoulli'sche Differentialgleichung* hat die Form

$$y' + f(x)y + g(x)y^\alpha = 0.$$

Die Substitution $z = y^{1-\alpha}$ ergibt

$$z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' = (1-\alpha)y^{-\alpha}(-f(x)y - g(x)y^\alpha) = -(1-\alpha)(f(x)y^{1-\alpha} + g(x)),$$

führt also auf die lineare, inhomogene Dgl.

$$z' + (1-\alpha)f(x)z = -(1-\alpha)g(x).$$

Beispiel 2.8. (Logistische Dgl.)

Die logistische Differentialgleichung

$$y' = ay(b-y) = aby - ay^2$$

kann als Bernoulli'sche Dgl. gelesen werden. Der Term ay^2 wird dabei auch als "soziale Reibung" bezeichnet. Das oben vorgeschlagene Lösungsverfahren führt zu:

$$z = y^{-1}, \quad z' + abz = a, \quad (ze^{abx})' = z'e^{abx} + abze^{abx} = ae^{abx}, \quad ze^{abx} = \frac{1}{b}e^{abx} + C,$$

und das liefert

$$z = \frac{1}{b} + Ce^{-abx} = \frac{1 + de^{-abx}}{b}, \quad \text{also} \quad y = \frac{b}{1 + de^{-abx}} \quad (d \in \mathbb{R}).$$

Bemerke, dass beim Substituieren die Lösung $y \equiv 0$ verlorengegangen ist.

Gleichungen 2.Ordnung: Die spezielle Gleichung 2. Ordnung

$$y'' = f(x, y')$$

wird durch Substitution $z = y'$ zur Gleichung 1. Ordnung $z' = f(x, z)$. Man löst also letztere, gewinnt z und bildet dann y als Stammfunktion.

Beispiel 2.9. (Kettenlinie, Katenoide)

Eine als homogen (konstante Massendichte $\rho > 0$) und unendlich dünn gedachte Kette endlicher Länge wird an ihren Endpunkten gehalten und hängt ansonsten frei, nur der als homogen gedachten Gravitation unterworfen. Gesucht ist ihr Verlauf, beschrieben als Funktionsgraph $y = y(x)$ über einem Intervall $[a, b]$.

Wir wollen zunächst eine Differentialgleichung für y finden. Dazu bezeichnen wir mit $K(x)$ das Kettenstück zwischen a und $x \in [a, b]$ und mit $F(x) = (F_h(x), F_v(x))$ die (vektoruelle) Kraft, mit der $K(x)$ am Punkte $P_x = (x, y(x))$ der Restkette zieht.

Nun sei $\Delta x > 0$ so klein, dass wir uns das Kettenstück zwischen x und $x + \Delta x$ als festen Stab der Länge $\Delta s := \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ vorstellen können. Im Punkt $P_{x+\Delta x}$ wirkt dann die Kraft

$$F(x + \Delta x) = F(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho g \Delta s \end{pmatrix}.$$

Teilt man durch Δx und lässt anschliessend $\Delta x \rightarrow 0$ gehen, ergibt sich

$$F'(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho g \sqrt{1 + y'(x)^2} \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ergibt sich, dass die horizontale Komponente $F_h(x)$ von $F(x)$ unabhängig von x ist.

Der Vektor $F(x)$ ist tangential zur Kette, daher gilt

$$y'(x) = \frac{F_v(x)}{F_h(x)} = \frac{F_v(a)}{F_h(a)}.$$

Nochmaliges Ableiten liefert dann

$$y'' = \frac{F'_v}{F_h(a)} = \frac{-\rho g}{F_h(a)} \sqrt{1 + (y')^2}.$$

Dies kann man nun mit der Substitution $z = y'$ lösen (Übung!) und erhält

$$y'(x) = \sinh(\alpha x + C)$$

mit $\alpha := \frac{-\rho g}{F_h(a)}$ und einer gewissen reellen Zahl $C \in \mathbb{R}$. (Es gilt $\alpha > 0$ (warum?)). Es folgt

$$y = \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha x + C) + C'$$

für gewisse Konstanten $C, C' \in \mathbb{R}$.

(Bemerkung: Zur genauen Bestimmung von y sind drei Unbekannte zu finden: C, C' und $F_h(a)$. Die Randbedingungen (Aufhängung in P_a und P_b) ergeben aber nur zwei Gleichungen. Die dritte kommt z.B. daher, dass man der Kette eine vorgeschriebene Gesamtlänge gibt. Es scheint so, dass man $F_h(a)$ nicht explizit, sondern nur numerisch bestimmen kann. Für C und C' gibt es dann wieder explizite Formeln in Abhängigkeit von $F_h(a)$.)

Exakte Differentialgleichungen

Wir erinnern uns an die Situation im Satz über implizite Funktionen aus Analysis 2. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $U: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Für $c \in \mathbb{R}$ ist dann $N_c := \{(x, y) : U(x, y) = c\}$ eine Niveaumenge von U .

Angenommen, $y: J \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine stetig differenzierbare Funktion derart, dass der Graph $\{(x, y(x)) : x \in J\}$ ganz innerhalb der Niveaumenge N_c liegt. Dann löst y die Gleichung

$$U(x, y(x)) = c. \quad (2.7)$$

Differenzieren nach x ergibt mit $\nabla U = (\partial_x U, \partial_y U) = (f, g)$ und der Kettenregel:

$$f(x, y) + g(x, y)y' = 0, \quad (2.8)$$

wobei $y = y(x)$ und $x \in J$ ist. Mit anderen Worten: löst y die gewöhnliche Gleichung (2.7), so auch die Differentialgleichung (2.8). Aber das gilt auch umgekehrt: wenn y die Dgl. (2.8) löst, dann ist

$$0 = f(x, y) + g(x, y)y' = \frac{d}{dx} U(x, y(x))$$

und daher $U(x, y(x)) \equiv c$ konstant (für ein gewisses $c \in \mathbb{R}$).

Die Lösungen von (2.8) entsprechen also eindeutig den Lösungen von (2.7). Das muss nicht unbedingt zu expliziten Lösungen von (2.8) führen, weil man die Gleichung $U(x, y) = c$ nicht unbedingt explizit nach y auflösen kann. Aber zumindest die *eindeutige Lösbarkeit* kann durch den Satz über implizite Funktionen garantiert werden.

Satz 2.10 (Exakte Differentialgleichung). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $(x_0, y_0) \in \Omega$ mit $g(x_0, y_0) \neq 0$. Falls eine stetig differenzierbare Funktion $U: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit $\nabla U = (f, g)$, so gibt es ein offenes Intervall $x_0 \in J \subseteq \mathbb{R}$, auf dem das Anfangswertproblem*

$$f(x, y) + g(x, y)y' = 0, \quad y(x_0) = y_0 \quad (2.9)$$

eine eindeutige Lösung y hat. Diese Lösung ist durch die Gleichung $U(x, y(x)) = U(x_0, y_0)$ eindeutig bestimmt.

Beweis. Aufgrund der Bedingung $\frac{\partial}{\partial y}U(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) \neq 0$ ist der Satz über implizite Funktionen anwendbar. Damit ist in einer Umgebung von (x_0, y_0) die Gleichung $U(x, y) = U(x_0, y_0)$ eindeutig nach y auflösbar. Diese Auflösung $y = y(x)$ löst, wie oben gesehen, auch (2.9). Umgekehrt muss, wie ebenfalls oben gesehen, jede Lösung von (2.9) auch die Gleichung $U(x, y(x)) = U(x_0, y_0)$ erfüllen, und daher mit der bereits gefundenen Lösung übereinstimmen. \square

Bemerkungen 2.11. (1) Die Eindeutigkeitsaussage im Satz ist eigentlich zu schwach formuliert. Nicht nur gibt es ein Intervall J und auf ihm eine eindeutige Lösung, sondern: es gibt eine Lösung $y: J \rightarrow \mathbb{R}$ und diese ist auf *jedem* Teilintervall von J , welches x_0 enthält, auch die einzige. Diese "starke Eindeutigkeit" wird uns im folgenden Kapitel wieder begegnen.

(2) Eine DGL. der Form

$$f(x, y) + g(x, y)y' = 0$$

heißt **exakt**, wenn die Funktion (f, g) in der Form $(f, g) = \nabla U$ für eine skalare Funktion U geschrieben werden kann. Man nennt dann U ein **Potential** für (f, g) .

Beispiel 2.12. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$(2xe^y - 1) + (x^2e^y + 1) \cdot y' = 0, \quad y(0) = 0.$$

Ein Potential ist $U(x, y) = x^2e^y - x + y$. Wegen $U(0, 0) = 0$ und

$$\frac{\partial U}{\partial y}(0, 0) = x^2e^y + 1 \Big|_{(x,y)=(0,0)} = 1 \neq 0$$

existiert ein Intervall I mit $0 \in I$ und eine Lösung $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems. Diese erfüllt

$$x^2e^{y(x)} - x + y(x) = 0.$$

Explizites Auflösen der Gleichung nach y ist nicht möglich.

Auflösen nach x ist aber möglich und man erhält

$$x = x(y) = \frac{1}{2}e^{-y} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4ye^y} \right)$$

für $y < 0, 20388 \dots$. Wegen $x(0) = 0$ ist für ein Intervall um 0 der negative Wert der Wurzel zu nehmen.

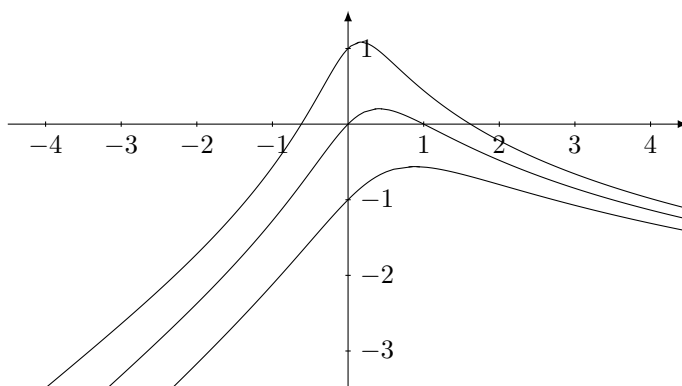


Abbildung 12: Lösungen von $(2xe^y - 1) + (x^2e^y + 1) \cdot y' = 0$ mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y(0) = \pm 1$.

Bemerkung 2.13. (1) Sind f und g stetig differenzierbar und hat (f, g) ein Potential U , so gilt nach dem Satz von Schwarz

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Umgekehrt kann man zeigen, dass in konvexen (oder allgemeiner: in sternförmigen) Gebieten diese sogenannte **Integrabilitätsbedingung**

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

die Existenz eines Potentials schon garantiert.

(2) Ist die Differentialgleichung

$$f(x, y) + g(x, y)y' = 0$$

nicht exakt, so kann man versuchen, eine Funktion M derart zu finden, dass

$$M(x, y)f(x, y) + M(x, y)g(x, y)y' = 0$$

exakt ist. (So eine Funktion M nennt man dann einen **integrierenden Faktor**.)

Als notwendige Bedingung für M ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial x}(Mg) = \frac{\partial}{\partial y}(Mf).$$

Diese Gleichung ist zwar nicht immer lösbar, aber in vielen Fällen kann man durch spezielle Ansätze für M Lösungen finden, etwa in dem man M nur von x oder nur von y abhängig wählt, oder auch als Funktion von $x^2 + y^2$.

(3) Oft schreibt man die Differentialgleichung

$$f(x, y) + g(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$$

auch in der symmetrischen Form

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0.$$

3 Existenz- und Eindeutigkeitsätze

In diesem Kapitel diskutieren wir geläufige Bedingungen für die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen für das Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{3.1}$$

wobei $(x_0, y_0) \in D \subseteq \mathbb{R}^{1+d}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig ist. Indem man $f = (f_1, \dots, f_d)$ und $y = (y_1, \dots, y_d)$ schreibt, ist die obige DGL äquivalent zum Dgl'ssystem

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_d) \\ y_2' = f_2(x, y_1, \dots, y_d) \\ \vdots \\ y_d' = f_d(x, y_1, \dots, y_d) \end{cases} \tag{3.2}$$

wie wir es schon in Abschnitt 1.6 gesehen haben.

Die Menge D heißt **Definitionsbereich** der Gleichung. Eine **Lösung** des AWP's (3.1) ist ein Intervall¹⁰ $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $x_0 \in I$ und eine 1-mal stetig differenzierbare Funktion $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^d$, sodass

$$\text{graph}(\gamma) \subseteq D, \quad \gamma'(x) = f(x, \gamma(x)) \quad (x \in I), \quad \gamma(x_0) = y_0.$$

Das Definitionsintervall $\text{dom}(\gamma) = I$ der Lösung heißt das zugehörige **Lösungsintervall**. Die Lösung γ heißt **rechts-maximal** bzw. **links-maximal**, wenn γ nicht zu einer Lösung auf einem größeren Lösungsintervall J fortgesetzt werden kann, das auch Punkte "rechts" bzw. "links" von I enthält. Und γ heißt **maximale Lösung**, wenn γ sowohl rechts- als auch links-maximal ist.

Man kann γ geometrisch-dynamisch als *Weg* im \mathbb{R}^d betrachten. Aus diesem Grund wird der Parameter x oft als "Zeit" tituliert. Die DGL (3.1) bedeutet dann, dass der Tangentialvektor von γ zur Zeit $x \in I$ durch das Vektorfeld $f(x, \cdot)$ im Punkt $\gamma(x)$ gegeben wird.

¹⁰Wie schon vereinbart ist immer ein *nicht-ausgeartetes* Intervall gemeint.

Bemerkung 3.1. Durch einen leichten Trick lässt sich das skalare AWP n -ter Ordnung

$$\begin{cases} z^{(n)} = g(x, z, z', \dots, z^{(n-1)}), \\ z(x_0) = z_0, z'(x_0) = z_1, \dots, z^{(n-1)}(x_0) = z_{n-1}, \end{cases} \quad (3.3)$$

das am Anfang von Abschnitt 1 stand, als Spezialfall von (3.1) (mit $n = d$) erkennen.

Dazu setzt man

$$f(x, y) = f(x, y_1, \dots, y_n) := (y_2, y_3, \dots, y_n, g(x, y_1, \dots, y_n)).$$

Buchstabiert man das zugehörige System (3.2) aus, so findet man

$$y'_1 = y_2, \quad y'_2 = y_3, \dots, \quad y'_{n-1} = y_n, \quad y'_n = g(x, y_1, \dots, y_n).$$

Die Lösungen y dieses Systems entsprechen den Lösungen z von (3.3) eindeutig via

$$z = y_1 \quad \text{bzw.} \quad y = (z, z', \dots, z^{(n-1)})$$

Wir werden später auf diesen Zusammenhang zurückkommen.

Vorarbeiten

Bevor wir zu den substantiellen Existenz- und Eindeutigkeitssätzen kommen können, müssen wir einige Dinge im Vorfeld klären.

Randpunkte des Lösungsintervalls. Zunächst charakterisieren wir, wann sich eine Lösung zu einer Lösung auf dem Abschluss des Lösungsintervalls fortsetzen lässt.

Lemma 3.2. Sei $\gamma: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine Lösung der DGL.

$$y' = f(x, y).$$

Die Lösung γ lässt sich genau dann zu einer Lösung $\tilde{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ fortsetzen, wenn der Grenzwert $z := \lim_{x \nearrow b} \gamma(x)$ existiert und $(b, z) \in D$ ist. In diesem Fall ist $\tilde{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$

$$\tilde{\gamma}(x) := \begin{cases} \gamma(x), & \text{falls } x \in [a, b) \\ z, & \text{falls } x = b \end{cases} \quad (3.4)$$

diese (eindeutig bestimmte) Fortsetzung.

Beweis. Da Lösungen stetig sind, ist die angegebene Bedingung notwendig und die Fortsetzung eindeutig bestimmt. Gilt umgekehrt die angegebene Bedingung, so betrachte die (stetige!) Funktion $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$

$$g(x) := \begin{cases} f(x, \gamma(x)), & \text{falls } x \in [a, b) \\ f(b, z), & \text{falls } x = b. \end{cases}$$

Weil g stetig ist, können wir integrieren und definieren $\tilde{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ durch

$$\tilde{\gamma}(x) := \gamma(a) + \int_a^x g(t) dt \quad (x \in [a, b]).$$

Nach dem Hauptsatz der Differentialrechnung ist $\tilde{\gamma}$ stetig differenzierbar mit $\tilde{\gamma}(a) = \gamma(a)$ und

$$\tilde{\gamma}'(x) = g(x) = f(x, \gamma(x)) = \gamma'(x)$$

für $x \in [a, b)$. Also ist $\tilde{\gamma} = \gamma$ auf $[a, b)$. Aus der Stetigkeit folgt dann $\tilde{\gamma}(b) = z$, und daraus

$$\tilde{\gamma}'(b) = g(b) = f(b, z) = f(b, \tilde{\gamma}(b)). \quad \square$$

Selbstverständlich gilt ein analoges Resultat, wenn man linke Randpunkte des Lösungsintervalls betrachtet.

Zusammensetzen von Lösungen. Da Lösungen nur einmal stetig differenzierbar sein müssen, ist es leicht, Lösungen, deren Lösungsintervalle aneinandergrenzen, zusammenzusetzen.

Lemma 3.3. *Es seien $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ und $\gamma_2: [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^d$ Lösungen der DGL*

$$y' = f(x, y)$$

mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Dann ist $\gamma: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^d$ definiert durch

$$\gamma(x) := \begin{cases} \gamma_1(x) & \text{falls } x \in [a, b], \\ \gamma_2(x) & \text{falls } x \in [b, c] \end{cases}$$

ebenfalls eine Lösung.

Vorwärts- und Rückwärtslösungen. Eine Lösung $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^d$ des AWP's (3.1) heißt **Vorwärtslösung**, wenn x_0 linker Randpunkt des Lösungsintervalls I ist. (Dann ist I also von der Form $[x_0, x_1]$ oder $[x_0, x_1)$, wobei im letzten Fall auch $x_1 = \infty$ möglich ist.)

Wir werden uns im folgenden fast ausschließlich um Vorwärtslösungen kümmern. Rückwärtslösungen von (3.1) erhält man, indem man Vorwärtslösungen $\tilde{\gamma}$ der "zeitinvertierten" Gleichung

$$z' = -f(-x, z), \quad z(-x_0) = y_0 \quad (3.5)$$

betrachtet und dann zu $\gamma(x) := \tilde{\gamma}(-x)$ übergeht. (Prüfen Sie das nach!)

Abschließend lassen sich dann Vorwärts- und Rückwärtslösungen mithilfe von Lemma 3.3 zu einer Lösung zusammensetzen.

Das Grönwall-Lemma. Um verschiedene Lösungen zu vergleichen und insbesondere für Eindeutigkeitsüberlegungen ist das folgende Resultat nützlich.

Lemma 3.4 (Grönwall). *Seien $A \in \mathbb{R}$ und $b: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}_+$ stetig. Weiter sei $\varphi: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit*

$$\varphi(t) \leq A + \int_a^t b(s)\varphi(s) \, ds$$

für $t \in [a, c]$. Sei $B(t) := \int_a^t b(s) \, ds$. Dann gilt

$$\varphi(t) \leq Ae^{B(t)} \quad (t \in [a, c]).$$

Beweis. Setze $\psi(t) := \int_a^t b(s)\varphi(s) \, ds$. Dann gilt $\psi' = b\varphi$ und daher

$$(e^{-B}\psi)' = e^{-B}\psi' - be^{-B}\psi = be^{-B}(\varphi - \psi) \leq Abe^{-B} = A(-e^{-B})'.$$

Integration von a bis t ergibt $e^{-B}\psi \leq A(1 - e^{-B})$, also

$$\varphi \leq A + \psi \leq A + A(e^B - 1) = Ae^B. \quad \square$$

Von der Differential- zur Integralgleichung Der entscheidende, wenn auch vielleicht unscheinbare, Schritt für alle Existenz- und Eindeutigkeitsresultate ist die folgende Charakterisierung von Lösungen.

Lemma 3.5. *Sei $(x_0, y_0) \in D \subseteq \mathbb{R}^{1+d}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig. Genau dann ist $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^d$ Lösung des AWP's*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

wenn gilt: γ ist stetig, $\text{graph}(\gamma) \subseteq D$ und

$$\gamma(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \gamma(t)) \, dt \quad (x \in I).$$

Beweis. Das folgt sofort aus dem Hauptsatz der Differentialrechnung. □

Die Lipschitz-Bedingung

Definition 3.6. Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, $f = f(x, y): D \rightarrow \mathbb{R}^d$ und $(x_0, y_0) \in D$.

- 1) Die Funktion f erfüllt (auf D) eine **Lipschitz-Bedingung** bzgl. y , wenn es $L \geq 0$ gibt mit

$$\|f(x, y) - f(x, y')\| \leq L \|y - y'\|$$

für alle $(x, y), (x, y') \in D$. (Man sagt auch, dass f **lipschitzstetig** bzgl. y ist.)

- 2) Die Funktion f erfüllt **lokal bei** (x_0, y_0) eine **Lipschitz-Bedingung** bzgl. y , wenn es eine offene Umgebung U von (x_0, y_0) gibt derart, dass f auf $D \cap U$ eine Lipschitz-Bedingung bzgl. y erfüllt.

Erfüllt f lokal bei (x_0, y_0) eine Lipschitz-Bedingung bzgl. y , so sagt man, f sei **lokal Lipschitz** bzgl. y bei (x_0, y_0) . Und f heißt einfach **lokal Lipschitz** bzgl. y , wenn dies bei jedem Punkt $(x_0, y_0) \in D$ gilt.

Beispiel 3.7. Wir betrachten Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist f lipschitzstetig (mit Lipschitz-Konstante L), falls

$$|f(x) - f(\bar{x})| \leq L|x - \bar{x}|$$

für alle $x, \bar{x} \in \mathbb{R}$.

Falls f lipschitzstetig ist, dann ist f gleichmäßig stetig: Sei $\varepsilon > 0$. Wir setzen dann $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$. Für $x, \bar{x} \in \mathbb{R}$ mit $|x - \bar{x}| < \delta$ gilt dann

$$|f(x) - f(\bar{x})| \leq L|x - \bar{x}| < L\delta = \varepsilon.$$

Die Umkehrung gilt nicht: Wir betrachten z.B. $f(x) = \sqrt{|x|}$. Dann ist f gleichmäßig stetig. Angenommen, f wäre lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante L . Betrachte $x = 0$ und $\bar{x} = \frac{1}{4L^2}$. Dann gilt

$$|f(x) - f(\bar{x})| = \sqrt{\frac{1}{4L^2}} = \frac{1}{2L} \not\leq L \frac{1}{4L^2} = L|x - \bar{x}|.$$

Bemerkungen 3.8. (1) Da alle Normen auf \mathbb{R}^d äquivalent sind, kommt es in der Formulierung der Lipschitz-Bedingung nicht auf die verwendete Norm an. (Die Konstante L ändert sich aber bei Wechsel der Norm.) Wir werden normalerweise die euklidische Norm $\|\cdot\|_2$ verwenden und dafür ab jetzt immer nur $\|\cdot\|$ schreiben.

(2) Die Lipschitz-Bedingungen bleiben erhalten, wenn man für die "Zeitumkehr" in der DGL zur Funktion $-f(-x, y)$ übergeht (siehe (3.5)). Daher reicht es in Beweisen meistens, nur Vorwärtslösungen zu betrachten, weil dann mittels Zeitumkehr analoge Resultate für Rückwärtslösungen gelten müssen.

Welche Funktionen sind lokal Lipschitz? Die Antworten geben der folgende Satz und sein Korollar.

Satz 3.9. Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Wir nehmen an, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Menge $D_x := \{y \in \mathbb{R}^d : (x, y) \in D\}$ offen und konvex ist. Sei weiter $f = f(x, y): D \rightarrow \mathbb{R}^d$ nach $y = (y_1, \dots, y_d)$ differenzierbar und $\frac{\partial f}{\partial y} f$ beschränkt¹¹ auf D . Dann erfüllt f auf D eine Lipschitz-Bedingung bzgl. y .

Beweis. Es gelte $\|\frac{\partial f}{\partial y} f\| \leq L$ auf D . Seien $(x, y), (x, y') \in D$. Nach dem mehrdimensionalen Mittelwertsatz gibt es $t \in [0, 1]$ mit

$$\|f(x, y) - f(x, y')\| \leq \left\| \frac{\partial}{\partial y} f(x, y + t(y' - y)) \right\| \|y - y'\| \leq L \|y - y'\|. \quad \square$$

Korollar 3.10. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $O \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und die Funktion $f = f(x, y): I \times O \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig nach y differenzierbar (d.h. $\frac{\partial f}{\partial y}$ ist stetig auf $I \times O$). Dann ist f lokal Lipschitz bzgl. y auf $I \times O$.

Beweis. Sei $(x_0, y_0) \in I \times O$. Wähle $\varepsilon > 0$ so, dass $B[y_0; \varepsilon] \subseteq O$ und $K := [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \cap I$ kompakt ist. Dann ist $K \times B[y_0; \varepsilon]$ kompakt, also ist $\frac{\partial f}{\partial y}$ darauf beschränkt. Nun wende man Satz 3.9 mit $D := K \times B(y_0; \varepsilon)$ an. \square

¹¹Wir schreiben $\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)$ für das totale Differential der Funktion $f(x_0, \cdot)$ im Punkt y_0 .

Lokale und Globale Eindeutigkeit

In diesem Abschnitt stellen wir die wichtigsten Eindeutigkeitsresultate vor.

Lemma 3.11. Sei $(x_0, y_0) \in D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ und $f = f(x, y) : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ erfülle eine Lipschitz-Bedingung bzgl. y auf D . Sind γ_1, γ_2 Lösungen des AWP

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

auf einem Intervall I , so gilt $\gamma_1 = \gamma_2$.

Beweis. Wir betrachten nur "Vorwärtseindeutigkeit". (Rückwärtseindeutigkeit ergibt sich analog bzw. durch Zeitumkehr.) Mit Lemma 3.5 findet man

$$\begin{aligned} |\gamma_1(x) - \gamma_2(x)| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, \gamma_1(t)) - f(t, \gamma_2(t)) dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |f(t, \gamma_1(t)) - f(t, \gamma_2(t))| dt \leq \int_{x_0}^x L |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| dt \end{aligned}$$

für $x_0 \leq x \in I$, wobei L die Konstante aus der Lipschitz-Bedingung ist. Grönwall's Lemma 3.4 mit $A = 0$ liefert $|\gamma_1(x) - \gamma_2(x)| \leq 0$ für $x_0 \leq x \in I$, also $\gamma_1 = \gamma_2$ auf $I \cap [x_0, \infty)$. \square

Satz 3.12 (Lokale Eindeutigkeit). Die Funktion $f = f(x, y) : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ sei stetig und lokal Lipschitz bzgl. y bei $(x_0, y_0) \in D$. Sind dann $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^d$ und $\gamma_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^d$ Lösungen des AWP

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

so gibt es $\varepsilon > 0$ mit $\gamma_1 = \gamma_2$ auf $I_1 \cap I_2 \cap [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$.

Beweis. Indem wir zu $I := I_1 \cap I_2$ übergehen, können wir $I_1 = I_2$ annehmen. Sei U eine Umgebung von (x_0, y_0) derart, dass f eine Lipschitz-Bedingung bzgl. y auf $D \cap U$ erfüllt. Weil γ_1 und γ_2 stetig sind, kann man $\varepsilon > 0$ finden mit

$$\text{graph}(\gamma_j|_{I \cap [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]}) \subseteq D \cap U \quad (j = 1, 2).$$

Nun folgt $\gamma_1 = \gamma_2$ auf $I \cap [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ aus Lemma 3.11. \square

Wir erinnern uns, dass ein AWP nicht eindeutig lösbar sein muss. Das hatten wir schon in Beispiel 2.4 (auslaufende Tonne) gesehen. Hier ist ein noch drastischeres Beispiel.

Beispiel 3.13. Betrachte die DGL

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}(1 + y^{\frac{2}{3}}).$$

Wir betrachten diese DLG auf \mathbb{R} , wobei mit $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ die Umkehrfunktion der bijektiven Funktion $x \mapsto x^3$ auf \mathbb{R} gemeint ist.

Offenbar ist $y \equiv 0$ eine (maximale) Lösung. Mit Trennung der Variablen erhält man weitere Lösungen $y \neq 0$, nämlich

$$y(x) = \tan^3(x - c)$$

für jeden Parameter $c \in \mathbb{R}$. Weil $y(c) = 0$ ist, kann man diese Lösungen bei $y = 0$ auseinanderschneiden und dann mit der Nulllösung zusammensetzen. Also ist für $a < b$ auch

$$y(x) = \begin{cases} \tan^3(x - a), & x \in (a - \frac{\pi}{2}, a] \\ 0, & x \in [a, b] \\ \tan^3(x - b), & x \in [b, b + \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

eine maximale Lösung. Durch jeden Punkt der Ebene gehen also unendlich viele verschiedene maximale Lösungen. Allerdings ist die konstante Nulllösung die einzige, deren Lösungsintervall ganz \mathbb{R} ist.

Das Beispiel ist nicht im Widerspruch zu Satz 3.12, da $f(x, y) = 3y^{\frac{2}{3}}(1 + y^{\frac{2}{3}})$ nicht lokal Lipschitz bzgl. y bei $(x_0, 0)$ ist.

Für $y_0 \neq 0$ ist f hingegen lokal Lipschitz bzgl. y bei (x_0, y_0) , zum Beispiel weil f für $y \neq 0$ stetig differenzierbar ist. Und tatsächlich sieht man, dass mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0 \neq 0$ die Lösungen "lokal eindeutig" sind, d.h.: je zwei Lösungen stimmen auf einem offenen Lösungsintervall um x_0 überein.

Aus der lokalen wird eine globale Eindeutigkeit, wenn man fordert, dass f bei jedem Punkt lokal Lipschitz ist.

Satz 3.14 (Globale Eindeutigkeit). *Die Funktion $f = f(x, y) : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ sei stetig und lokal Lipschitz bzgl. y . Sind $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^d$ und $\gamma_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^d$ für $(x_0, y_0) \in D$ Lösungen des AWP*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

so gilt $\gamma_1 = \gamma_2$ auf $I_1 \cap I_2$.

Beweis. Wieder betrachten wir hier nur die Vorwärtseindeutigkeit. Sei $x_1 > x_0$ mit $[x_0, x_1] \subseteq I_1 \cap I_2$. Definiere

$$x_* := \sup\{t \in [x_0, x_1] : \gamma_1 = \gamma_2 \text{ auf } [x_0, t]\}.$$

Wegen Stetigkeit gilt dann $y_* := \gamma_1(x_*) = \gamma_2(x_*)$. Also lösen γ_1, γ_2 das AWP

$$y' = f(x, y), \quad y(x_*) = y_*.$$

Nach Satz 3.12 gibt es $\varepsilon > 0$ mit $\gamma_1 = \gamma_2$ auf $[x_0, x_1] \cap [x_*, x_* + \varepsilon]$. Nach Definition von x_* folgt daraus $x_* = x_1$. \square

Korollar 3.15 (Maximale Lösungen). *Die Funktion $f = f(x, y) : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ sei stetig und lokal Lipschitz bzgl. y . Dann kann jede Lösung des AWP*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{3.6}$$

zu einer maximalen Lösung fortgesetzt werden. Diese maximale Lösung ist eindeutig, insbesondere: jede Lösung ist Einschränkung dieser maximalen.

Beweis. Wir setzen

$$\mathcal{M} := \{\gamma : \gamma \text{ ist Vorwärtslösung von (3.6)}\}$$

und nehmen an, dass \mathcal{M} nicht leer ist.

Sind $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{M}$, und ist (ohne Einschränkung der Allgemeinheit) $\text{dom}(\gamma_1) \subseteq \text{dom}(\gamma_2)$, so gilt nach Satz 3.14: $\gamma_2 = \gamma_1$ auf $\text{dom}(\gamma_1)$, d.h. γ_2 setzt γ_1 fort. Die Menge \mathcal{M} ist also total geordnet (bzgl. "Fortsetzung", also Inklusion der Graphen). Daher wird durch

$$\bigcup_{\gamma \in \mathcal{M}} \text{graph}(\gamma)$$

der Graph einer Abbildung γ_{\max} gegeben. Diese ist offensichtlich eine maximale Vorwärtslösung.

Analog verfährt man mit Rückwärtslösungen (wenn es welche gibt), und wenn man die maximalen Vor- und Rückwärtslösungen zusammensetzt, erhält man eine maximale Lösung. Offenbar ist jede Lösung Einschränkung dieser maximalen, der Satz also bewiesen. \square

Beispiel 3.16. Betrachte die DGL

$$y' = 1 + y^2.$$

Hier ist $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, und $f(x, y) = 1 + y^2$ ist stetig differenzierbar, also stetig und lokal Lipschitz. Die maximalen Lösungen sind gegeben durch

$$y(x) = \tan(x + c) \quad (c \in \mathbb{R})$$

mit maximalem Lösungsintervall $(-\pi/2, \pi/2) - c$. Jeder Punkt (x_0, y_0) liegt auf genau einer maximalen Lösungskurve.

Der Satz von Picard-Lindelöf

In diesem Abschnitt behandeln wir nun (endlich!) die Existenz von Lösungen des AWP

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (3.7)$$

Satz 3.17 (Picard–Lindelöf, lokal). *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $O \subseteq \mathbb{R}^d$ und $f = f(x, y) : I \times O \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine stetige Funktion, die bzgl. y eine Lipschitz-Bedingung erfüllt. Weiter sei $x_0 \in I$ und $y_0 \in O^\circ$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ und eine Lösung γ von (3.7) mit Lösungsintervall $I_\varepsilon := I \cap [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$.*

Genauer: Es seien $\varepsilon, r, K > 0$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) $B[y_0; r] \subseteq O$;
- (ii) I_ε ist kompakt;
- (iii) $\sup\{|f(x, y)| : x \in I_\varepsilon, y \in B[y_0; r]\} \leq K$;
- (iv) $\varepsilon \leq \frac{r}{K}$.

Dann existiert genau eine Lösung $\gamma : I_\varepsilon \rightarrow O$ von (3.7).

Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten. Als erstes bemerken wir, dass man (i)–(iii) realisieren kann: Wegen $y_0 \in O^\circ$ gibt es $r > 0$ mit (i); und wenn $\varepsilon > 0$ hinreichend klein ist, ist I_ε kompakt. Es gilt nämlich

$$I_\varepsilon = I \cap [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] = \begin{cases} [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] & \text{falls } x_0 \in I^\circ, \\ [x_0, x_0 + \varepsilon] & \text{falls } x_0 \text{ linker Randpunkt von } I, \\ [x_0 - \varepsilon, x_0] & \text{falls } x_0 \text{ rechter Randpunkt von } I \end{cases}$$

für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$. Da stetige Funktionen auf Kompakta beschränkt sind, findet sich dann auch K mit (iii). Wenn man nun ε kleiner macht, vergrößert sich r/K , und daher gilt auch (iv) wenn ε klein genug ist.

Es reicht also, die zweite Behauptung zu zeigen. Dazu nehmen wir nun an, die Konstanten $\varepsilon, r, K > 0$ seien gegeben und erfüllen (i)–(iv). Wir schreiben kurz $I := I_\varepsilon$. Damit ist also I ein kompaktes Intervall mit $x_0 \in I \subseteq [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. Sei schliesslich $L \geq 0$ die Konstante in der Lipschitz-Bedingung, also

$$\|f(x, y) - f(x, y')\|_2 \leq L\|y - y'\| \quad (x \in I, y, y' \in O). \quad (3.8)$$

Die Fixpunkt-Idee. Die Idee zur Konstruktion einer Lösung γ liegt in ihrer Charakterisierung als stetiger Abbildung, welche die Integralgleichung

$$\gamma(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \gamma(t)) dt \quad (x \in I)$$

erfüllt. Diese Gleichung kann man abstrakt schreiben als *Fixpunktgleichung*

$$T\gamma = \gamma$$

wobei die Abbildung $T : C(I; O) \rightarrow C(I; \mathbb{R}^d)$ durch

$$u \mapsto Tu, \quad (Tu)(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, u(t)) dt \quad (x \in I) \quad (3.9)$$

gegeben ist. Hierbei ist $C(I; \mathbb{R}^d)$ der Raum aller stetigen Funktionen auf I mit Werten in \mathbb{R}^d und $C(I; O)$ die Teilmenge derjenigen Funktionen, die Werte in O haben.

Eine Lösung von (3.7) ist also ein *Fixpunkt* von T . An dieser Stelle erinnere man sich an folgendes Ergebnis aus Analysis II:

Satz 3.18 (Banach'scher Fixpunktsatz). *Sei (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum und $T: \Omega \rightarrow \Omega$ eine Abbildung. Es existiere $q \in (0, 1)$ mit*

$$d(Tu, Tv) \leq q \cdot d(u, v)$$

für alle $u, v \in \Omega$. Dann hat T genau einen Fixpunkt, das heißt, es existiert genau ein $p \in \Omega$ mit $Tp = p$.

Mehr noch: für jedes $u_0 \in \Omega$ konvergiert die rekursiv durch $u_{n+1} := Tu_n$ definierte Folge $(u_n)_{n \geq 0}$ gegen p .

Wir wollen also einen geeigneten vollständigen metrischen Raum Ω von \mathbb{R}^d -wertigen Funktionen so finden, dass darauf die durch (3.9) gegebene Abbildung T wohldefiniert ist und der Banach'schen Fixpunktsatz anwendbar ist.

Der Raum Ω . Dazu versehen wir zuerst $C(I; \mathbb{R}^d)$, den Raum aller stetigen \mathbb{R}^d -wertigen Funktionen, mit der üblichen Supremumsnorm

$$\|u\|_\infty := \|u\|_{\infty, I} := \sup_{x \in I} \|u(x)\|_2 \quad (u \in C(I; \mathbb{R}^d)).$$

(Dies ist wohldefiniert weil I kompakt ist.) Wie für skalare Funktionen zeigt man, dass $C(I; \mathbb{R}^d)$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ ein vollständiger normierter Raum ist.

Nun betrachten wir auf $C(I; \mathbb{R}^d)$ die neue Norm(!)

$$\| \| u \| \| := \sup_{x \in I} e^{-L|x-x_0|} \|u(x)\|_2 \quad (u \in C(I; \mathbb{R}^d)).$$

Diese ist äquivalent zur Supremumsnorm. Das sieht man, indem man das Supremum bzgl. $x \in I$ in den folgenden Ungleichungen nimmt:

$$e^{-L|x-x_0|} \|u(x)\|_2 \leq \|u(x)\|_2 \leq e^{L\varepsilon} e^{-L|x-x_0|} \|u(x)\|_2 \quad (x \in I).$$

Insbesondere ist der Raum $C(I; \mathbb{R}^d)$ auch bzgl. $\| \cdot \|$ vollständig. Der Grund für die Umnormierung liegt darin, dass die durch (3.9) definierte Abbildung T nun strikt kontraktiv wird. Genauer:

Lemma 3.19. *Unter den Gegebenheiten von Satz 3.17 und den dazu gemachten Vereinbarungen ($x_0 \in I \subseteq [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ kompakt, L Lipschitz-Konstante, T definiert durch (3.9)) gilt mit $q = 1 - e^{-L\varepsilon} \in (0, 1)$*

$$\| \| Tu - Tv \| \| \leq q \| \| u - v \| \| \quad \text{für alle } u, v \in C(I; O).$$

Beweis. Sei $\text{sgn}(\cdot)$ die Signumfunktion ist. Für $x \in I$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \| \| Tu(x) - Tv(x) \| \| &= \left\| \int_{x_0}^x f(t, u(t)) - f(t, v(t)) \, dt \right\|_2 \\ &\leq \text{sgn}(x - x_0) \int_{x_0}^x \|f(t, u(t)) - f(t, v(t))\|_2 \, dt \\ &\leq \text{sgn}(x - x_0) \int_{x_0}^x L \|u(t) - v(t)\|_2 \, dt \\ &\leq \text{sgn}(x - x_0) \int_{x_0}^x L e^{L|t-x_0|} \| \| u - v \| \| \, dt \\ &= \text{sgn}(x - x_0) \| \| u - v \| \| \int_0^{x-x_0} L e^{L|s|} \, ds \\ &= \| \| u - v \| \| \int_0^{|x-x_0|} L e^{Ls} \, ds = (e^{L|x-x_0|} - 1) \| \| u - v \| \|. \end{aligned}$$

Multiplikation mit $e^{-L|x-x_0|}$ ergibt dann

$$e^{-L|x-x_0|} \| \| Tu(x) - Tv(x) \| \| \leq (1 - e^{-L|x-x_0|}) \| \| u - v \| \| \leq (1 - e^{-L\varepsilon}) \| \| u - v \| \|,$$

denn $|x - x_0| \leq \varepsilon$. Nun nimmt man noch das Supremum über $x \in I$ und erhält gewünschte Ungleichung. \square

Damit wären wir fertig, wenn die Menge $C(I; O)$ abgeschlossen in $C(I; \mathbb{R}^d)$ und invariant unter T wäre. Dies gilt z.B für $O = \mathbb{R}^d$, ist aber i.A. falsch. Wir definieren daher

$$\Omega := C(I; B[y_0, r]) = \{u \in C(I; \mathbb{R}^d) : \|u(x) - y_0\|_2 \leq r \text{ für alle } x \in I\} \quad (3.10)$$

und fixieren darauf die Metrik $d(u, v) := \|u - v\|$. Bemerke, dass Tu für jedes $u \in \Omega$ definiert ist.

Lemma 3.20. *Der metrische Raum (Ω, d) ist vollständig. Unter den bislang gemachten Annahmen, insbesondere wegen $\varepsilon \leq r/K$, gilt $T(\Omega) \subseteq \Omega$.*

Beweis. Da gleichmäßige Konvergenz die punktweise Konvergenz impliziert und $B[y_0; r]$ abgeschlossen in \mathbb{R}^d ist, ist Ω abgeschlossen in $C(I; \mathbb{R}^d)$. Da letzterer Raum vollständig ist, ist auch Ω vollständig. Für $u \in \Omega$ ist

$$\begin{aligned} \|Tu(x) - y_0\|_2 &= \left\| \int_{x_0}^x f(t, u(t)) dt \right\|_2 \leq \operatorname{sgn}(x - x_0) \int_{x_0}^x \|f(t, u(t))\|_2 dt \\ &\leq |x - x_0| K \leq \varepsilon K \leq r \end{aligned}$$

für alle $x \in I$ und daher $Tu \in \Omega$. □

Damit können wir nun den *Beweis von Satz 3.17 abschließen*: Nach Lemma 3.20 ist der in (3.10) definierte metrische Raum (Ω, d) vollständig und der durch (3.9) definierte Operator T kann als Abbildung $T: \Omega \rightarrow \Omega$ begriffen werden. Nach Lemma 3.19 ist T eine strikte Kontraktion und hat daher nach dem Banach'schen Fixpunktsatz (Satz 3.18) einen eindeutigen Fixpunkt, sagen wir $\gamma: I \rightarrow O$. Wegen Lemma 3.5 löst γ das AWP (3.7), und aufgrund der Lipschitzbedingung wissen wir schon (Lemma 3.11), dass es keine andere Lösung auf I geben kann. Damit ist Satz 3.17 vollständig bewiesen. □

Bemerkung 3.21. Der Banach'sche Fixpunktsatz liefert nicht nur die Existenz eines Fixpunktes, sondern auch eine Methode, ihn zu finden (bzw. beliebig zu approximieren), nämlich durch Iteration von T auf einen (beliebigen) Startwert.

Wendet man dies auf die gegenwärtige Situation mit dem Startwert $u_0 \equiv y_0$ an, so erhält man die sogenannte **Picard-Iteration**

$$u_0 \equiv y_0, \quad u_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, u_n(t)) dt \quad (n \geq 0).$$

Ist $\varepsilon > 0$ klein genug, so ist auf $I \cap [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ die Folge $(u_n)_n$ wohldefiniert und sie konvergiert gleichmäßig gegen die (eindeutige) Lösung u .

Beispiel 3.22. Betrachte das eindimensionale AWP

$$y' = y, \quad y(0) = 1.$$

Hier hat man $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Die Funktion $f(x, y) = y$ ist global Lipschitz bzgl. y (mit Konstante $L = 1$). Für $|y - 1| \leq r$ ist $|f(x, y)| = |y| \leq |y - 1| + 1 \leq r + 1$, also $K = r + 1$ in der Terminologie von Satz 3.17. Man kann also Picard-Iteration für $|x| \leq \frac{r}{r+1}$ anwenden (wobei $r > 0$ beliebig sein darf). Diese ergibt: $u_0 = 1$,

$$u_1 = 1 + \int_0^x dt = 1 + x, \quad u_2 = 1 + \int_0^x (1 + t) dt = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \quad \text{usw.}$$

Per Induktion zeigt man leicht $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k$. Der Beweis von Satz 3.17 zeigt also, dass die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ gleichmäßig auf jedem kompakten Teilintervall von $(-1, 1)$ gegen die Lösung des AWP konvergiert.

Das Beispiel zeigt, dass man durch die Anwendung von Satz 3.17 im Allgemeinen kein maximales Lösungsintervall erhält und dass die Picard-Iteration möglicherweise auf größeren als den durch den Satz garantierten Intervallen durchgeführt werden kann.

Kombiniert man nun Satz 3.17 mit den Resultaten über maximale Fortsetzungen von Lösungen aus dem vorangegangenen Abschnitt, so erhält man den klassischen Satz von Picard-Lindelöf.

Satz 3.23 (Picard-Lindelöf). Sei $(x_0, y_0) \in D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig und lokal Lipschitz bzgl. y . Es gebe ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und eine offene Menge $O \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $(x_0, y_0) \in I \times O \subseteq D$. Dann hat das AWP

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

eine eindeutige maximale Lösung $\gamma: I_{\max} \rightarrow \mathbb{R}^d$. Jede andere Lösung ist Einschränkung von γ . Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ ist $I \cap [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subseteq I_{\max}$.

Beweis. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^{1+d}$ offen mit $(x_0, y_0) \in U$ und derart, dass f auf $D \cap U$ eine Lipschitz-Bedingung bzgl. y erfüllt. Man wählt zunächst $\delta > 0$ und $O' \subseteq O$ offen so, dass

$$(x_0, y_0) \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times O' \subseteq U.$$

Nun kann man Satz 3.17 mit $I' := I_\delta := I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ und O' statt I und O anwenden, denn $I' \times O' \subseteq D \cap U$. Es gibt also $\varepsilon > 0$ und eine Lösung γ_{loc} auf I_ε . Diese kann nach Korollar 3.15 zu einer maximalen Lösung $\gamma: I_{\max} \rightarrow \mathbb{R}^d$ fortgesetzt werden. Diese ist eindeutig und jede andere Lösung ist Einschränkung von γ . \square

Bemerkungen 3.24. (1) Die hier angegebene Version des Satzes von Picard-Lindelöf ist leicht allgemeiner (und daher auch leicht komplizierter) als die, die in den meisten Büchern zu finden ist.

Üblicherweise wird angenommen, dass D offen ist. In diesem Fall ist die Existenz des Intervalles I und der offenen Menge O automatisch und muss nicht extra gefordert werden. Man kann dann mit *jedem beliebigen* Paar $(x_0, y_0) \in D$ von Anfangsbedingungen starten. Überdies kann man I als offen wählen und daher enthält I_{\max} ein offenes Intervall um x_0 .

(2) In der in (1) betrachteten "klassischen" Situation gibt es immer Lösungen in beide Richtungen (vorwärts und rückwärts). Ein Zustand hat immer eine Zukunft *und* eine Vergangenheit, die "Zeit" ist zumindest lokal immer umkehrbar. Nun gibt es aber viele Phänomene, bei denen so etwas nicht der Fall ist, wo eine Startsituation keine "Vergangenheit" besitzen muss und nur Vorwärtslösungen in Betracht kommen. Hier versagt die klassische Formulierung.

Nehmen wir z.B. an, dass $I = [x_0, \infty)$ ist. Hier garantiert Satz 3.17 eine Lösung auf einem Intervall der Form $[x_0, x_0 + \varepsilon]$ und Satz 3.23 eine eindeutige maximale Lösung, welche ein solches Intervall enthält.

(3) Der Satz von Picard-Lindelöf ist nicht der einzige Existenzsatz für Lösungen von DGL.en. Fordert man nur die Stetigkeit von f , so kann man mit dem sog. *Satz von Peano* ebenfalls die Existenz lokaler Lösungen garantieren. Dieser kann über einen anderen Fixpunktsatz bzw. über ein Kompaktheitsargument im Raum stetiger Funktionen (Satz von Arzela-Ascoli) bewiesen werden. Naturgemäß ist der Satz von Peano nur ein Existenz- aber kein Eindeutigkeitssatz.

Lineare Differentialgleichungssysteme

Wir wenden zum Schluss den Satz von Picard-Lindelöf an, um die Lösungstheorie für lineare Differentialgleichung 1. Ordnung, die wir in Abschnitt 2 behandelt haben, auf Systeme linearer Differentialgleichungen zu verallgemeinern. Wir betrachten also das AWP

$$y' = A(x)y + b(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad (3.11)$$

wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist, $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}^d$, und wobei $A: I \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ und $b: I \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetige Funktionen sind. Ausgeschrieben entspricht die DGL in (3.11) dem System

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= a_{11}(x)y_1(x) + \cdots + a_{1n}(x)y_n(x) + b_1(x), \\ &\vdots \\ y_n'(x) &= a_{n1}(x)y_1(x) + \cdots + a_{nn}(x)y_n(x) + b_n(x). \end{aligned}$$

Wie im eindimensionalen Fall nennt man das System (3.11) **homogen**, wenn $b = 0$, ansonsten **inhomogen**.

In der Terminologie von Kapitel 3 ist $D = I \times \mathbb{R}^d$ und $f(x, y) = A(x)y + b(x)$. Die Stetigkeit von f ist schon gegeben. Dazu gilt noch

$$\|f(x, y) - f(x, y')\|_2 = \|A(x)(y - y')\|_2 \leq \|A(x)\| \|y - y'\|_2,$$

wobei $\|A(x)\|$ die *Operatornorm* der Matrix $A(x)$ ist. Wählt man ein *kompaktes* Teilintervall $J \subseteq I$, so ist $L_J := \sup_{x \in J} \|A(x)\| < \infty$ aufgrund der Stetigkeit von A . Man hat dann auf J eine uniforme Lipschitz-Bedingung bzgl. y mit Konstante L_J .

Insbesondere ist f also lokal Lipschitz und man kann den Satz von Picard-Lindelöf anwenden. Hier kann man aber noch mehr sagen, denn es gilt der folgende Satz (den wir fast schon bewiesen haben).

Satz 3.25. *Seien I ein Intervall, $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}^d$, und $A: I \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ und $b: I \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig, Dann hat das Anfangswertproblem*

$$y' = A(x)y + b(x), \quad y(x_0) = y_0,$$

eine eindeutige Lösung $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^d$. Die rekursiv definierte Folge

$$\gamma_0 := 0, \quad \gamma_{n+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^x (A(t)\gamma_n(t) + b(t)) dt \quad (n \in \mathbb{N}, x \in I)$$

konvergiert auf jedem kompakten Teilintervall von I gleichmäßig gegen γ .

Beweis. Sei $J \subseteq I$ ein kompaktes Teilintervall mit $x_0 \in J$. Wir betrachten den Raum $\Omega := C(J; \mathbb{R}^d)$, also den Fall $O = \mathbb{R}^d$ im Beweis vom Satz von Picard-Lindelöf. Wir hatten dort bemerkt, dass Ω vollständig bzgl. der Supremumsnorm und daher auch bzgl. der äquivalenten Norm $\|\cdot\|$ ist. Der Operator T ist wieder durch (3.9) gegeben, und jetzt gibt es keine Probleme mehr mit der Iteration. Man kann direkt Lemma 3.19 anwenden (wobei $\varepsilon > 0$ so groß ist dass $J \subseteq [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ ist). Also ist T strikt kontraktiv und hat daher genau einen Fixpunkt, gegen den dann die Picard-Iterierten konvergieren. \square